Dimostrazione. Omessa.

<u>Commento</u> Possiamo riscrivere la (*) in questo modo:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right).$$

Il limite passa dentro l'argomento della funzione continua.

<u>Teorema</u> Somma, prodotto e quoziente $\frac{f}{g}$, con $g \neq 0$, di funzioni continue è una funzione continua.

Dim. Segue dal Teorema precedente e dall'analogo Teorema sui limiti.

<u>Teorema</u> Le funzioni x^α, $\sin x$, $\cos x$, a^x sono continue nel loro dominio.

Dim. Proviamo che $x \mapsto \sin x$ è continua nel generico punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

Se $x_0 = 0$ sappiamo già che

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 = \sin x_0 .$$

In generale avremo

$$\sin(x + x_0) = \sin(x) \cos(x_0) + \sin(x_0) \cos x$$

Quindi
$$\lim_{x \to 0} \sin(x+x_0) = \lim_{x \to 0} \sin(x)\cos(x_0) + \sin(x_0)\cos(x)$$
$$= \sin(x_0)$$

In questo $\lim_{x \to 0} \cos x = 1.$

Proviamo che $x \mapsto e^x$ è continua nel punto $x_0 = 0$;

$$\lim_{x \to 0} e^x \overset{?}{=} 1 \ (= e^0).$$

Siccome $x \mapsto e^x$ è crescente, basta controllare che

$$\lim_{n \to \infty} e^{1/n} = 1 .$$

Questo è un fatto noto.

In generale
$$\lim_{x \to 0} e^{x_0 + x} = \lim_{x \to 0} e^{x_0} e^x = e^{x_0}.$$

$\square$

TEOREMA (degli zeri) Siano $A = [a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a) < 0$ ed $f(b) > 0$. Allora esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

Dim. Per la permanenza del segno esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) < 0 \quad \text{per} \quad x \in [a, a+\delta],$$
$$f(x) > 0 \quad \text{per} \quad x \in [b-\delta, b].$$

Definiamo

$$B = \{x \in [a,b] : f(x) < 0\} \neq \emptyset$$

e sia

$$x_0 = \sup B.$$

Avremo $a+\delta \leq x_0 \leq b-\delta$.

Siccome $x_0 + \frac{1}{n} \notin B$ avremo $f(x_0 + 1/n) \geq 0$

e quindi

$$f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) \geq 0.$$

Siccome $x_0 = \sup B$ esiste $x_n \in B$, $n \in \mathbb{N}$, tale che $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$, siccome $f(x_n) < 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, avremo

$$f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \leq 0.$$

La conclusione è $f(x_0) = 0$. □

<u>TEOREMA</u> Siano $A = [a,b]$ un intervallo ed $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ con $\inf_A f < t < \sup_A f$ l'equazione

$$f(x) = t$$

ha almeno una soluzione $x \in A$.

Dim. Applicare il Teorema degli zeri a $g(x) = f(x) - t$. $\square$

<u>Esercizio</u> Verificare che l'equazione

$$\sin(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \quad , \quad x \in [0, \pi]$$

ha esattamente due soluzioni su $[0, \pi]$.

SOLUZIONE: La funzione

$$f(x) = \sin(x) - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

è continua. Studiamo f sull'intervallo $[0, \pi/2]$.

Siccome

$$f(0) = -\frac{\pi^2}{4} < 0 \quad e \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$$

esiste $x \in (0, \pi/2)$ tale che $f(x) = 0$.

Siccome f è strettamente crescente, il punto x è unico.

Analogo discorso su $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. $\square$

TEOREMA (Continuità della funzione composta)

Siano $f: A \to B$ una funzione continua su A e $g: B \to C$ una funzione continua su B. Allora la funzione composta $g \circ f: A \to C$ è continua su A.

Dim. Siano $x_0 \in A$ ed $\varepsilon > 0$. Siccome g è continua nel punto $y_0 = f(x_0) \in B$ esiste $\eta > 0$ tale che

(1) $$|y - f(x_0)| < \eta \implies |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon.$$

Inoltre f è continua in $x_0 \in A$ e quindi in corrispondenza di $\eta > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

(2) $$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \eta .$$

Mettendo insieme (1) e (2) si ottiene:

$$|x - x_0| < \delta \implies |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon.$$

□

TEOREMA Sia $A \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva. Allora:

i) f è strettamente monotona (crescente oppure decrescente)

ii) $f(A) \subset \mathbb{R}$ è un intervallo;

iii) La funzione inversa $f^{-1}: f(A) \to A$ è continua.

Dim. Omessa.