DEFINIZIONE (Uniforme Continuità) Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ si dice uniformemente continua su A se

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tale che $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ per tutti gli $x_1, x_2 \in A$ tali che $|x_1 - x_2| < \delta$.

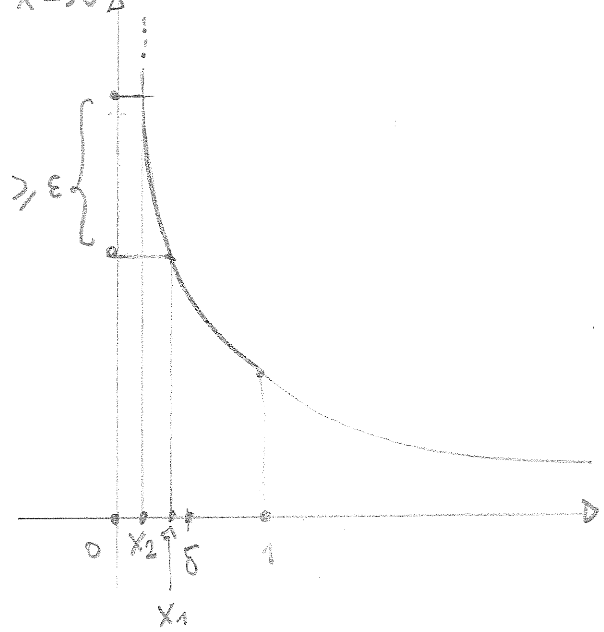
Esempio La funzione $f: (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ NON è uniformemente continua su $(0,1]$.

In effetti, dati $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ esistono punti $x_1, x_2 \in (0,1]$ con $x_1, x_2 \in (0, \delta)$, e quindi $|x_1 - x_2| < \delta$, tali che

$$\left| \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right| \geq \varepsilon$$

Infatti

$$\lim_{x \to 0^+} \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_1} \right| = \infty .$$



<u>TEOREMA</u> Sia $A = [a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua su A. Allora f è uniformemente continua su A.

Prova. La tesi è:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in A : \ |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon .$$

Procediamo per assurdo e neghiamo la tesi:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in A : \ |x-y| < \delta \ \underline{\text{ma}} \ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon .$$

Dunque

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n, y_n \in A : \ |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \ \text{ma} \ |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

Le successioni $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sono limitate e quindi hanno sottosuccessioni convergenti:

$$x_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} x_0 \in A$$

$$y_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} y_0 \in A$$

Siccome

$$|\underset{\substack{\downarrow \\ x_0}}{x_{n_k}} - \underset{\substack{\downarrow \\ y_0}}{y_{n_k}}| < \frac{1}{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

deduciamo che $x_0 = y_0$.

D'altra parte

$$\left| f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \right| \geq \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Per la continuità di f:

$$0 = |f(x_0) - f(x_0)| = \lim_{k \longrightarrow \infty} \left| f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \right| \geq \varepsilon > 0.$$

Assurdo.

$\square$