Facciamo la sostituzione

$$t = \log\left(1+\frac{h}{x}\right) \iff e^t = 1+\frac{h}{x}$$
$$\iff (e^t-1)x = h$$

dove $h \to 0 \Rightarrow t \to 0$. Quindi

$$(*) = \lim_{t\to 0} \frac{t}{x(e^t-1)} = \frac{1}{x}$$

(8) $D\sinh(x) = \cosh(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Infatti

$$D\sinh(x) = D\,\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$= \frac{De^x - D\,e^{-x}}{2}$$
$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

(9) $D\cosh(x) = \sinh(x)$, $x \in \mathbb{R}$, Analogo.

(10) $D|x| = \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$. Qui $x \neq 0$.

TEOREMA (Operazioni sulle derivate) Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili (su tutto A). Allora:

1) $D(f+g)(x) = Df(x) + Dg(x)$

2) $D(f \cdot g)(x) = Df(x) \cdot g(x) + f(x)\, Dg(x)$

3) Se $g \neq 0$ allora

$$D\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{-Dg(x)}{g(x)^2}.$$

4) Se $g \neq 0$ allora

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{Df(x) \cdot g(x) - f(x)\, Dg(x)}{g(x)^2}.$$

Provo 2):

$$(fg)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\, g(x+h) + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\, f(x)$$

$$= f'(x)\, g(x) + g'(x)\, f(x).$$

Prova 3):

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h\, g(x+h)\, g(x)}$$

$$= - \frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

4) Segue da 2) e 3).

$\square$

<u>Esempio.</u> $D\,tg\,x = \frac{1}{\cos^2 x}$. Esercizio.

<u>Esempio.</u> Proviamo per induzione che

$$D x^n = n x^{n-1}.$$

Per $n = 1$ la formula è vera (Base Induttiva).
Controlliamo il passo induttivo:

$$D x^n = D(x \cdot x^{n-1}) = (Dx) \cdot x^{n-1} + x\, D x^{n-1} =$$

$$= x^{n-1} + \underbrace{x\,(n-1)\,x^{n-2}}_{\text{(Ipotesi Induttiva)}} = n\,x^{n-1}.$$

$\square$

<u>TEOREMA</u> (<u>Derivata della funzione composta</u>)

Sia $f : A \to B$ una funzione derivabile nel punto $x_0 \in A$ e sia $g : B \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $f(x_0) \in B$. Allora la funzione composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ è derivabile nel punto x_0 e inoltre:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Dim. Introduciamo la funzione ausiliaria $h : B \to \mathbb{R}$

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} & y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) & y = f(x_0). \end{cases}$$

Chiaramente h è continua in $y = f(x_0)$.

Per $x \neq x_0$ abbiamo

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = h(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Siccome $h \circ f$ è continua in x_0:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = h(f(x_0))\, f'(x_0)$$

$$= g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

□

Esempio calcoliamo

$$D \log(\log(1+x^2)) = \frac{1}{\log(1+x^2)} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x,$$

Esempio. Sia $\alpha > 0$. Proviamo che

$$D x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0.$$

Infatti:

$$D x^\alpha = D e^{\log x^\alpha} = D e^{\alpha \log x} =$$

$$= e^{\alpha \log x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x}$$

$$= x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

$\square$

TEOREMA (Derivata della funzione inversa)
Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione invertibile (iniettiva) derivabile nel punto $x_0 \in A$ con $f'(x_0) \neq 0$. Allora la funzione inversa $f^{-1}: f(A) \to A$ è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ e inoltre

$$D f^{-1}(y_0) = \frac{1}{Df(x_0)}.$$

Dim. Si ha

$$D f^{-1}(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{Df(x_0)} .$$

Abbiamo fatto la sostituzione $f^{-1}(y) = x$.

□

<u>Esempi:</u>

1) $$D \arcsin(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} , \quad -1 < y < 1 .$$

Siano infatti $y_0 = \sin(x_0)$. Allora

$$D \arcsin(y_0) = \frac{1}{D \sin(x_0)} = \frac{1}{\cos(x_0)} =$$

$$= \frac{1}{+\sqrt{1 - \sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}} .$$

Scelto il segno + perché su $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è $\cos x_0 > 0$.

2) $$D \arccos(y) = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}} , \quad -1 < y < 1 .$$

Prova analoga.