ESERCIZIO Sia data la funzione

$$f(x) = (x^2+2x-3)\, e^{x^2+2x}, \quad x \in [-1,1].$$

Calcolare i punti di massimo e minimo (assoluti e relativi).

Soluzione. Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = (2x+2)\, e^{x^2+2x} + (x^2+2x-3)(2x+2)\, e^{x^2+2x}$$

$$= (2x+2)\, e^{x^2+2x} \left(1 + x^2+2x-3 \right)$$

$$= 2(x+1)(x^2+2x-2)\, e^{x^2+2x}.$$

Calcoliamo i punti critici:

$$f'(x) = 0 \iff (x+1)(x^2+2x-2) = 0$$

Si trova $x=-1$. Questo punto critico è un estremo dell'intervallo $[-1,1]$. Risolviamo

$$x^2+2x-2=0 \iff x = -1 \pm \sqrt{1+2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

La soluzione $x=-1-\sqrt{3}$ è da scartare in quanto $-1-\sqrt{3} \notin [-1,1]$. Invece si ha $-1+\sqrt{3} \in (-1,1)$. Infatti:

$$-1+\sqrt{3} < 1 \iff \sqrt{3} < 2 \iff 3 < 4.$$

Studiamo il segno della derivata. Siccome $x+1 \geq 0$ su $[-1,1]$, si ha

$$f'(x) \geq 0 \iff x^2+2x-2 \geq 0$$

$$\iff x \geq \sqrt{3}-1 \quad (\text{e } \underbrace{x \leq -1-\sqrt{3}}_{\text{inutile}})$$

Dunque

	-1		$\sqrt{3}-1$		1
f'	0	$- \; - \; -$	0	$+ \; + \; +$	
f		$\downarrow$		$\uparrow$	
			p.to minimo assoluto		

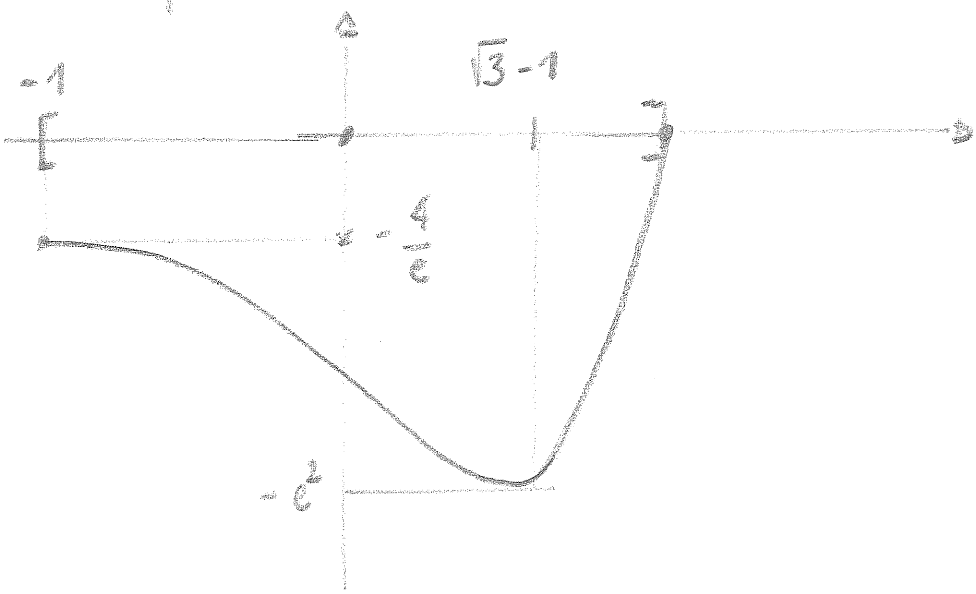
Calcoliamo f nei punti $-1, \sqrt{3}-1, 1$:

$$f(-1) = (1-2-3)\, e^{1-2} = -4\, e^{-1} < 0$$

$$f(\sqrt{3}-1) = (3+1-\cancel{2\sqrt{3}} + \cancel{2\sqrt{3}} - 2 - 3)\, e^{2} = -e^{2}$$

$$f(1) = (1+2-3)\, e^{1+2} = 0$$

Dunque $x = 1$ è il punto di massimo assoluto.



$\square$

ESERCIZIO Verificare che

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}, \qquad \forall x>0.$$

Soluzione. Formiamo la differenza

$$f(x) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}, \qquad x>0.$$

Vogliamo provare che $f(x)>0 \quad \forall x>0$.
Limiti agli estremi:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \log(1) - 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \log(\infty) - 1 = \infty.$$

Derivata:

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-(x+1)+x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

Quindi $f'(x)<0$ per ogni $x>0$.
Dunque f è decrescente su $(0,\infty)$, strettamente.

Di conseguenza

$$x < y \implies f(x) > f(y)$$

e con $y \to \infty$ si ottiene $\quad f(x) > 0 \quad \forall x > 0$.

<u>Esercizio</u>. Verificare che la funzione

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad x > 0,$$

è (strettamente) crescente.

Soluzione. Conviene studiare la funzione

$$g(x) = \log f(x) = x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Se g è crescente, anche $f(x) = e^{g(x)}$ è crescente. Derivata di g:

$$g'(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$= \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0$$

per l'Esercizio precedente.

□

OSSERVAZIONE Il limite

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

esiste perché $f(x)$ è crescente. Siccome

$$\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

deve anche essere

$$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Di conseguenza, per $k \in \mathbb{R}$ (ad es. $k>0$)

$$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^x \underset{x = kt}{=} \lim_{t \to \infty} \left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^k = e^k.$$

ESERCIZIO. Sia $\alpha \in [0,1]$ un numero reale fissato. Verificare che per ogni $x, y \geq 0$ si ha

$$(x+y)^\alpha \leq x^\alpha + y^\alpha.$$

Soluzione. Possiamo supporre che $y > 0$. Dividendo per y^α si ottiene la disuguaglianza

$$\frac{(x+y)^\alpha}{y^\alpha} \leq \frac{x^\alpha}{y^\alpha} + 1$$

ovvero

$$\left(\frac{x}{y}+1\right)^\alpha \leq \left(\frac{x}{t}\right)^\alpha + 1$$

e ponendo $t = x/y$ si ottiene la disuguaglianza

$$(t+1)^\alpha \leq t^\alpha + 1, \qquad t \geq 0.$$

Studiamo la funzione

$$\phi(t) = t^\alpha + 1 - (t+1)^\alpha, \qquad t \geq 0,$$

Derivata:

$$\phi'(t) = \alpha\, t^{\alpha-1} - \alpha\,(t+1)^{\alpha-1}.$$

Segno della derivata; (uso $\alpha>0$)

$$\phi'(t) \geq 0 \iff t^{\alpha-1} \geq (t+1)^{\alpha-1}$$

$$\iff (t+1)^{1-\alpha} \geq t^{1-\alpha}$$

Verificata in quanto $1-\alpha \geq 0$.

Quindi ϕ è crescente e di conseguenza

$$\phi(t) \geq \phi(0) = 0 \qquad \forall t \geq 0.$$

$\square$