ESEMPIO Proviamo che per $1<\alpha<2$ la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$
converge.

Consideriamo la funzione $f(x) = x^{\alpha-1}$, $x \geq 0$.
La funzione è derivabile per $x>0$ (ma NON nel punto $x=0$). Inoltre
$$f'(x) = (\alpha-1)\, x^{\alpha-2} > 0$$
in quanto $\alpha>1$, mentre
$$f''(x) = (\alpha-1)(\alpha-2)\, x^{\alpha-3} < 0$$
in quanto $1<\alpha<2$. Quindi f' è decrescente.
Siano $0<a<b$. Per il Teorema di Lagrange esiste $\xi \in (a,b)$ tale che
$$f(b) - f(a) = f'(\xi)\,(b-a) \geq f'(b)\,(b-a)$$
in quanto $f'(\xi) \geq f'(b)$ essendo $\xi < \beta$.

Scegliamo $b = \frac{1}{n}$ e $a = \frac{1}{n+1}$. Troviamo
$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} - \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\alpha-1} \geq (\alpha-1)\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha-2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$\geq (\alpha-1)\,\frac{1}{n^{\alpha-2}}\;\frac{1}{n(n+1)}$$

siccome $n+1 \leq 2n$ si trova

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} - \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\alpha-1} \geq \frac{\alpha-1}{2} \quad \frac{1}{n^\alpha} .$$

Possiamo dunque confrontare:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{2}{\alpha-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} - \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\alpha-1} < \infty .$$

Infatti l'ultima serie è telescopica convergente.

$\square$

TEOREMI DI HÔPITAL

TEOREMA (HÔPITAL 1) Siano $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in [a,b]$, ed $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue su $[a,b]$ e derivabili su $[a,b] \setminus \{x_0\}$. Supponiamo che:

i) $f(x_0) = g(x_0) = 0$;

ii) $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$;

iii) Esiste finito o infinito il limite

$$L = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in [-\infty, \infty].$$

Allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Dimostrazione. É sufficiente verificare che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L$$

per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $x_n \in [a,b] \setminus \{x_0\}$ e $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, per il Teorema di Cauchy esiste $\bar{x}_n \in (x_0, x_n)$ tale che

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \frac{f'(\bar{x}_n)}{g'(\bar{x}_n)}.$$

Quindi si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} = L .$$

$\square$

<u>TEOREMA (Hôpital 2)</u> Siano $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili tali che:

i) $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = \infty$;

ii) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$;

iii) Esiste finito o infinito il limite

$$L = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Allora esiste anche il limite

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L .$$

Dimostrazione. Omessa.

TEOREMA (Hôpital 3) Siano $f, g : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili tali che:

i) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$ (oppure 0);

ii) $g'(x) \neq 0$ per $x > a$;

iii) Esiste finito o infinito il limite

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} ,$$

Allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L .$$

Dimostrazione. Omessa.

Esercizio Verificare che per $x \to 0$ si ha

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + o(x^3) .$$

Soluzione. Dobbiamo verificare che

$$e^x - 1 - x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3!} x^3 \underset{x \to 0}{=} o(x^3) ,$$

ovvero che

$$0 = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!}}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{3x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{6x}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{6} = 0 .$$

$\square$

<u>Esercizio.</u> Per $\alpha > 0$ calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x .$$

Soluzione. Usiamo Hôpital:

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0 ,$$

$\square$

<u>Esercizio.</u> Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

è derivabile nel punto $x = 0$.