Soluzione. Controlliamo che f sia continua in $x=0$:

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{|x|}} \left[= e^{-\infty}\right] = 0 = f(0).$$

c'è continuità.

Usiamo la definizione di derivata:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{x}.$$

Proviamo con Hôpital:

$$L \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{D\, e^{-\frac{1}{|x|}}}{D\, x} = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{|x|}}\, D\left(-\frac{1}{|x|}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{|x|}} \left(-\frac{-x/|x|}{|x|^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|^3}\, e^{-\frac{1}{|x|}}, \quad \text{è peggiorato!}$$

Riproviamo:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/|x|}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{1/|x|}\cdot\left(-\frac{x}{|x|^3}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^3}{x^3}\, e^{-\frac{1}{|x|}} = 0,$$

Dunque $f'(0) = 0$, la funzione f è derivabile in $x=0$.

$\square$

SVILUPPI DI TAYLOR

Sia $A=(a,b)\subset\mathbb{R}$ un intervallo aperto e sia $f: A\to\mathbb{R}$ una funzione.

NOTAZIONE

(1) $f\in C(A) \iff f$ è continua su A

(2) $f\in C^1(A) \iff f'$ esiste su A e $f'\in C(A)$

(3) $f\in C^2(A) \iff f''$ derivata seconda esiste su A e $f''\in C(A)$

(4) $f\in C^k(A) \iff f^{(k)}$ derivata k-esima esiste in A e $f^{(k)}\in C(A)$

(5) $f\in C^\infty(A) \iff f\in C^k(A)$ per ogni $k\in\mathbb{N}$.

Sia $x_0\in A$ un punto fissato. Vogliamo approssimare f intorno a x_0 con una somma di monomi del tipo $c_k(x-x_0)^k$ con $c_k\in\mathbb{R}$ opportune costanti.

Definizione (Polinomio di Taylor) Siano $f \in C^{\infty}(A)$ e $x_0 \in A$. Il polinomio di Taylor di f di grado $n \in \mathbb{N}$ e punto base (centro) x_0 è

$$P_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Il resto n-esimo è per definizione

$$R_n(x, x_0) = f(x) - P_n(x, x_0).$$

TEOREMA (Taylor) Siano $f \in C^{\infty}(A)$, $x_0 \in A$ ed $n \in \mathbb{N}$.
Allora si ha

$$f(x) = P_n(x, x_0) + R_n(x, x_0), \quad x \in A,$$

ed esiste $\xi \in (x_0, x)$ tale che il resto n-esimo verifica

$$(*) \qquad R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

Resto in forma di Lagrange

In particolare si ha

$$R_n(x, x_0) = o\left((x - x_0)^n\right) \text{ per } x \to x_0.$$

Resto in forma di Peano

Dimostrazione. Proviamo la (*). Introduciamo le due funzioni

$$G(x) = (x-x_0)^{n+1},$$

$$F(x) = R_n(x,x_0) = f(x) - P_n(x,x_0).$$

Chiaramente $F, G \in C^\infty(A)$. Allora:

$$G^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{per } k=0,1,\dots,n$$

$$G^{(n+1)}(x_0) = (n+1)!$$

Calcoliamo le derivate di F:

$$F^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - \sum_{h=0}^{n} \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!}\left[(x-x_0)^h\right]^{(k)}.$$

Vogliamo valutare queste derivate nel punto $x = x_0$. Osserviamo che

$$\left[(x-x_0)^h\right]^{(k)}\Bigg|_{x=x_0} = \begin{cases} k! & \text{se } k=h, \\ 0 & \text{se } k \neq h. \end{cases}$$

Quindi

$$F^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{se } k=0,1,\dots,n$$

mentre

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x), \quad x \in A.$$

Usiamo ripetutamente il Teorema di Cauchy:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} \qquad \text{Esiste } \xi_1 \in (x_0, x)$$

$$= \frac{F'(\xi_1)-F'(x_0)}{G'(\xi_1)-G'(x_0)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} \qquad \text{Esiste } \xi_2 \in (x_0, \xi_1)$$

$$= \quad \ldots \quad = \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} \qquad \text{Esiste } \xi_n \in (x_0, \xi_{n-1})$$

$$= \frac{F^{(n)}(\xi_n)-F^{(n)}(x_0)}{G^{(n)}(\xi_n)-G^{(n)}(x_0)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{G^{(n+1)}(\xi)} \qquad \text{Esiste } \xi \in (x_0, \xi_n)$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Deduciamo che $F(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} G(x)$, ovvero

$$f(x) = P_n(x, x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Questo prova la (*). Ovviamente

$$(x-x_0)^{n+1} = o((x-x_0)^n) \quad \text{per } x \to x_0$$

e la formula con resto di Peano segue.

$\square$