Appunti sull'integrale di Riemann

Roberto Monti

11 Gennaio 2013 - Versione riveduta

Indice

CAPITOLO 1

Integrale di Riemann

1. Definizione dell'integrale di Riemann

Consideriamo un intervallo chiuso e limitato $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE 1.1 (Suddivisione). Una *suddivisione* di A è un insieme ordinato di punti $D = \{a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b\}$, con $n \geq 1$. Indichiamo con $\mathcal{D}(A)$ l'insieme di tutte le suddivisioni di A.

DEFINIZIONE 1.2 (Suddivisione più fine). Siano D_1 e D_2 due suddivisioni di A. Diremo che D_1 è più fine di D_2 se tutti i punti di D_2 sono contenuti in D_1, ovvero se $D_2 \subset D_1$.

Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione *limitata*. Data una suddivisione $D = \{a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b\}$, sia $A_i = [x_{i-1}, x_i]$, con $i = 1, \ldots, n$, l'i-esimo intervallo associato a questa suddivisione. Essendo f limitata, sono finiti i seguenti estremi inferiore e superiore

$$m_i = \inf_{x \in A_i} f(x) \quad \text{e} \quad M_i = \sup_{x \in A_i} f(x).$$

Si chiamano rispettivamente *somme inferiori* e *somme superiori* di f relativamente alla suddivisione D i valori

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \quad \text{e} \quad S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}).$$

Somme inferiori e superiori ammettono una semplice interpretazione geometrica come aree di opportune unioni di rettangoli.

Proprietà delle somme inferiori e superiori:

1) Per ogni suddivisione D vale $s(f, D) \leq S(f, D)$.
2) Se D_1 è una suddivisione più fine di D_2, allora $s(f, D_1) \geq s(f, D_2)$ e $S(f, D_1) \leq S(f, D_2)$.
3) Date due suddivisioni generiche D_1 e D_2, si ha sempre $s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$. Per verificare questa affermazione, osserviamo che la suddivisione $D_1 \cup D_2$ è più fine sia di D_1 che di D_2. Quindi, dalle proprietà 1) e 2) segue che
$$s(f, D_1) \leq s(f, D_1 \cup D_2) \leq S(f, D_1 \cup D_2) \leq S(f, D_2).$$
4) Dalla proprietà 3) discende che
$$\sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f, D) \leq \inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f, D).$$

Definizione 1.3 (Funzione Riemann-integrabile). Sia $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione limitata $f : A \to \mathbb{R}$ si dice Riemann-integrabile su A e si scrive $f \in \mathcal{R}(A)$ se

$$\sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f, D) = \inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f, D).$$

In questo caso, il valore comune

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f, D) = \inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f, D)$$

si dice integrale di f su $A = [a, b]$.

Nel caso di funzioni positive l'integrale di Riemann ammette un'interpretazione geometrica come area della regione del piano delimitata dal grafico di f e dall'asse delle x.

Esempio 1.4 (Funzione di Dirichlet). Esistono funzioni che *non* sono integrabili nel senso di Riemann. Un esempio è la *funzione di Dirichlet*. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

Data una qualsiasi suddivisione $D = \{0 = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = 1\}$ dell'intervallo $[0, 1]$, posto $A_i = [x_{i-1}, x_i]$ risulta sempre

$$\inf_{x \in A_i} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \sup_{x \in A_i} f(x) = 1.$$

Infatti in ogni A_i ci sono sia punti razionali che punti reali non razionali. Dunque, si ha $s(f, D) = 0$ e $S(f, D) = 1$ per una qualsiasi suddivisione e dunque

$$\sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f, D) = 0 < 1 = \inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f, D).$$

La funzione di Dirichlet non è Riemann-integrabile.

1.1. Proprietà generali dell'integrale di Riemann. L'integrale di Riemann gode delle seguenti proprietà:

1) **Linearità**. Se $f, g \in \mathcal{R}(A)$ allora $(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}(A)$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e inoltre
$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$
2) **Monotonia**. Se $f, g \in \mathcal{R}(A)$ e $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in A$ allora
$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$
3) **Scomposizione del dominio**. Se $f \in \mathcal{R}(A)$ e $A = [a, b] = [a, c] \cup [c, b]$ allora
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4) Se $f \in \mathcal{R}(A)$ allora $|f| \in \mathcal{R}(A)$ e inoltre

$$\Big| \int_a^b f(x)dx \Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Convenzione (Integrale con segno). Sia $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Definiamo l'integrale di f fra b ed a (con $b > a$) nel seguente modo

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Teorema 1.5 (Integrabilità delle funzioni continue). Sia $A = [a,b]$ un intervallo chiuso e limitato e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua su A. Allora f è Riemann-integrabile in A.

Dim. Fissato $\varepsilon > 0$ proveremo che esiste una suddivisione $D \in \mathcal{D}(A)$ tale che

$$S(f,D) \leq s(f,D) + \varepsilon. \tag{1.1}$$

Da questo fatto segue che

$$\inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f,D) \leq S(f,D) \leq s(f,D) + \varepsilon \leq \sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f,D) + \varepsilon.$$

Data l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, si conclude che

$$\inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f,D) \leq \sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f,D).$$

Da questa disuguaglianza e dalla disuguaglianza opposta, la proprietà 4) delle somme inferiori e superiori, si deduce che

$$\inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f,D) = \sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f,D),$$

ovvero che f è Riemann-integrabile su A.

Dimostriamo la (1.1). Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Dal momento che f è continua su A, allora per il Teorema di Heine-Cantor essa è anche uniformemente continua su A e quindi esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Scegliamo la suddivisione $D = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ in modo tale che $x_i - x_{i-1} < \delta$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$. Dunque se $x, y \in A_i = [x_{i-1}, x_i]$ allora

$$f(x) - f(y) \leq |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \text{ovvero} \quad f(x) \leq f(y) + \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Si deduce che

$$M_i = \sup_{x \in A_i} f(x) \leq \inf_{x \in A_i} f(x) + \frac{\varepsilon}{b-a} = m_i + \frac{\varepsilon}{b-a},$$

e da qui segue

$$S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} \left\{ m_i + \frac{\varepsilon}{b-a} \right\}(x_i - x_{i-1})$$
$$= s(f,D) + \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = s(f,D) + \varepsilon.$$

Questo prova la (1.1) e quindi il teorema. □

Osservazione 1.6. Polinomi, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche e iperboliche e loro composizioni sono Riemann-integrabili (su intervalli chiusi e limitati dove sono definite).

2. Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Lemma 2.1 (della Media Integrale). Siano $A = [a,b]$ ed $f \in C(A)$. Allora esiste $\xi \in A$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(\xi).$$

Dim. Osserviamo che

$$\min_A f \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \le \max_A f.$$

Quindi l'affermazione è una conseguenza del teorema dei valori intermedi. □

Definizione 2.2 (Funzione integrale). Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. La funzione $F : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

si chiama *funzione integrale* di f.

Definizione 2.3 (Primitiva). Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Una funzione $G \in C^1([a,b])$ tale che $G'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$ si dice *primitiva* di f.

Osserviamo che se G è una primitiva di f allora anche $G(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$, è una primitiva di f. Quindi una funzione che ammette una primitiva ne ammette infinite.

Lemma 2.4. Siano $F, G \in C^1([a,b])$ e tali che $G'(x) = F'(x)$ per ogni $x \in [a,b]$. Allora la funzione $F - G$ è costante.

Dim. La funzione ausiliaria $H = G - F$ è derivabile e verifica $H'(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$. Siano $x_1, x_2 \in [a,b]$. Per il Teorema di Lagrange esiste un punto ξ compreso fra x_1 e x_2 tale che

$$H(x_1) - H(x_2) = H'(\xi)(x_1 - x_2) = 0.$$

Questo prova che H è costante su $[a,b]$. □

Per il lemma precedente, due primitive di una stessa funzione *su un intervallo* differiscono di una costante.

TEOREMA 2.5 (Fondamentale del calcolo integrale). Sia $f \in C([a, b])$ una funzione continua e sia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ la sua funzione integrale.

1) Allora F è derivabile in $[a, b]$ e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.
2) Inoltre, se G è una primitiva di f si ha $F(x) = G(x) - G(a)$, ed in particolare

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) = G(b) - G(a).$$

Dim. Fissiamo $x_0 \in [a, b]$ e consideriamo il rapporto incrementale, per $x \neq x_0$,

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \left\{ \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right\} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la proprietà di scomposizione del dominio per l'integrale di Riemann. Per il Lemma della media integrale per ogni x esiste un punto $\xi = \xi(x)$ compreso fra x e x_0, questo punto dipende da x, tale che

$$\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt = f(\xi(x)).$$

Nel limite $x \to x_0$ si ha $\xi(x) \to x_0$. Quindi esiste il limite del rapporto incrementale per F e vale

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(\xi(x)) = f(x_0).$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la continutà di f. Questo prova l'affermazione 1) del teorema.

Proviamo l'affermazione 2). Le funzioni F e G sono entrambe primitive di f e quindi $F'(x) = f(x) = G'(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Dal Lemma 2.4 segue che $F - G$ è costante e quindi $F(x) - G(x) = F(a) - G(a)$. Essendo $F(a) = 0$ si trova

$$F(x) = G(x) - G(a), \quad x \in [a, b].$$

Ricordando la definizione di funzione integrale e valutando l'identità precedente nel punto $x = b$ si trova la tesi. $\square$

Applicazione del Teorema del Calcolo integrale. Il Teorema fondamentale del calcolo integrale permette di calcolare gli integrali. Data una funzione integranda f, si cerca una primitiva G di f. L'integrale di f è allora

$$\int_a^b f(x)dx = \big[G(x)\big]_{x=a}^{x=b} = G(b) - G(a).$$

Ad esempio, la funzione $f(x) = 1/x$ ha come primitiva $G(x) = \log |x|$ in quanto $G'(x) = 1/x$, e dunque

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \big[\log |x|\big]_{x=1}^{x=2} = \log 2 - \log 1 = \log 2.$$

Analogamente, la funzione $f(x) = \log |x|/x$ ha come primitiva $G(x) = \log^2 |x|/2$ e dunque

$$\int_1^2 \frac{\log x}{x}dx = \left[\frac{1}{2}\log^2 x\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{2}\log^2 2.$$

Definizione 2.6 (Integrale indefinito). Con l'espressione *integrale indefinito* di una funzione f si indica una generica primitiva di f. L'integrale indefinito di f si indica con il simbolo di integrale senza estremi di integrazione

$$\int f(x)dx.$$

Segue una breve tavola con le primitive delle funzioni elementari.

Tavola delle primitive

Funzione	**Primitiva**
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$1/x$	$\log\lvert x\rvert$
$e^{\alpha x} \quad (\alpha \neq 0)$	$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\tan x$	$-\log\lvert\cos x\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

3. Integrazione di funzioni razionali

Una funzione razionale è una funzione del tipo

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dove P e Q sono polinomi. La funzione è ben definita nell'insieme dove $Q(x) \neq 0$. In questa sezione illustriamo il metodo per calcolare gli integrali di funzioni razionali.

3.1. Esempi elementari. Vediamo alcuni semplici esempi di calcolo dell'integrale indefinito di funzioni razionali.

Esempio 3.1. $Q(x) = x + k$ con $k \in \mathbb{R}$.

$$\int \frac{1}{x+k}dx = \log|x+k|$$

$$\int \frac{x}{x+k}dx = \int \frac{x+k-k}{x+k}dx = \int \left(1 - \frac{k}{x+k}\right)dx = x - k\log|x+k|$$

$$\int \frac{x^2}{x+k}dx = \int \left(\frac{x(x+k)}{x+k} - \frac{kx}{x+k}\right)dx = \frac{x^2}{2} - kx + k^2\log|x+k|.$$

Esempio 3.2. $Q(x) = x^2 + 1$.

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x$$
$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1)$$
$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int \left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = x - \arctan x$$
$$\int \frac{x^3}{x^2+1}dx = \int \frac{x^3+x-x}{x^2+1}dx = \int \left(x-\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(x^2+1).$$

Esempio 3.3. $P(x) = 2ax + b$ e $Q(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \log|ax^2+bx+c|.$$

Esempio 3.4. $P(x) = 1$ e $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Vogliamo calcolare l'integrale

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx, \qquad a, b, c \in \mathbb{R},$$

con $a \neq 0$. Si considera il discriminate $\Delta = b^2 - 4ac$ del polinomio $Q(x)$.

Caso 1: $\Delta < 0$. In questo caso, si ha $Q(x) = \alpha\big((\beta x+\gamma)^2+1\big)$, con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ da determinare in funzione di a, b, c. Ci si riduce all'integrale

$$\int \frac{1}{\alpha\big((\beta x+\gamma)^2+1\big)}dx = \frac{1}{\alpha\beta}\arctan(\beta x+\gamma).$$

Caso 2: $\Delta > 0$. In questo caso, si ha $Q(x) = a(x-x_0)(x-x_1)$, con $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ radici (distinte) di Q. Ci si riduce all'integrale

$$\int \frac{1}{a(x-x_0)(x-x_1)}dx = \frac{1}{a(x_0-x_1)}\log\left|\frac{x-x_0}{x-x_1}\right|,$$

che si calcola col metodo dei fratti semplici.

Caso 3: $\Delta = 0$. In questo caso, si ha $Q(x) = a(x-x_0)^2$, con $x_0 \in \mathbb{R}$ radice doppia di Q. Ci si riduce all'integrale

$$\int \frac{1}{a(x-x_0)^2}dx = -\frac{1}{a(x-x_0)}.$$

Esempio 3.5. Calcolare l'integrale

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1-x^2}dx.$$

Soluzione. Il polinomio $Q(x) = 1-x^2$ ha due radici reali distinte. Scomponiamo la funzione integranda come segue:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x},$$

dove A e B sono numeri reali da determinare. Osserviamo che

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} = \frac{(A+B)+(A-B)x}{1-x^2}.$$

Per avere uguaglianza deve essere $1 = (A+B)+(A-B)x$, e quindi

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Possiamo allora calcolare l'integrale di partenza nel seguente modo

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx = \\ &= \frac{1}{2}\Big[\log|1+x| - \log|1-x|\Big]_{x=-1/2}^{x=1/2} = \\ &= \frac{1}{2}\left[\log\frac{|1+x|}{|1-x|}\right]_{x=-1/2}^{x=1/2} = \frac{\log 3}{2}. \end{aligned}$$

Esempio 3.6. Calcolare l'integrale

$$I = \int_{-1/2}^{1} \frac{1}{x^2+x+1}dx.$$

Soluzione. Il polinomio al denominatore ha discriminante $\Delta = -3$ e quindi è sempre positivo. Completiamo il quadrato relativamente ai primi due addendi

$$x^2+x+1 = \left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+1-\frac{1}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right].$$

Quindi si deve calcolare l'integrale

$$I = \frac{4}{3}\int_{-1/2}^{1}\frac{1}{\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{x=-1/2}^{x=1} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi.$$

Esempio 3.7. Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}dx.$$

Soluzione. Il polinomio al denominatore ha due radici semplici $x=-1$ e $x=-2$. Scomponiamo la funzione integranda nel seguente modo

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}.$$

dove A e B sono numeri reali da determinare. Osserviamo che

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{(2A+B)+(A+B)x}{x^2+x+1}.$$

Per avere l'uguaglianza deve essere $1 = (2A+B)+(A+B)x$ e quindi

$$\begin{cases} 2A+B=1 \\ A+B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=+1 \\ B=-1. \end{cases}$$

Possiamo allora calcolare l'integrale di partenza

$$I = \int_{-1/2}^{1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \log \frac{4}{3},$$

dove i calcoli intermedi sono lasciati al lettore come esercizio.

3.2. Decomposizione in fratti semplici. Siano $P(x)$ e $Q(x)$ due polinomi. Vogliamo calcolare l'integrale

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

Passo 1. Se P ha grado strettamente minore del grado di Q si procede direttamente al Passo 2. Se P ha grado maggiore o uguale al grado di Q, si esegue una divisione di polinomi:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{Q(x)} + S(x),$$

dove R, il resto della divisione, è un polinomio con grado strettamente minore del grado di Q, ed S è il quoziente della divisione, un polinomio che sappiamo integrare.

Passo 2. A questo punto supponiamo direttamente che P abbia grado strettamente minore del grado di Q. Si scompone Q in un prodotto di fattori irriducibili e si procede come nel seguente esempio.

Supponiamo che sia $P(x) = 1$ e $Q(x) = x^4 - x^3$. I fattori irriducibili del polinomio Q sono x^3 e $x - 1$, infatti $Q(x) = x^3(x-1)$. Il quoziente $P/Q = 1/Q$ si scompone in una somma di frazioni algebriche come segue

$$\frac{1}{x^3(x-1)} = \frac{A + Bx + Cx^2}{x^3} + \frac{D}{x-1}.$$

Avremo tante frazioni (i "fratti semplici") quanti sono i fattori irriducibili. I fattori irriducibili appaiono al denominatore di ciascun "fratto semplice". Al numeratore si scrive un generico polinomio di grado pari al grado del denominatore diminuito di 1.

Le costanti reali A, B C e D si determinano nel seguente modo. Eseguendo le somme algebriche si trova l'identità

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3(x-1)} &= \frac{A + Bx + Cx^2}{x^3} + \frac{D}{x-1} = \\ &= \frac{(C+D)x^3 + (B-C)x^2 + (A-B)x - A}{x^2+x+1}. \end{aligned}$$

Confrontando i numeratori si trova l'equazione

$$1 = (C+D)x^3 + (B-C)x^2 + (A-B)x - A.$$

Quindi, per il principio di identità dei polinomi, si arriva al sistema

$$\begin{cases} C + D = 0 \\ B - C = 0 \\ A - B = 0 \\ -A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -1 \\ C = -1 \\ D = 1. \end{cases}$$

Esempio 3.8. Calcolare l'integrale

$$I = \int_2^3 \frac{1}{x^3(x-1)} dx.$$

Soluzione. Usando la decomposizione in fattori semplici, si trova

$$I = \int_2^3 \Big(\frac{-1-x-x^2}{x^3} + \frac{1}{x-1} \Big) dx = \int_2^3 \Big(-x^{-3} - x^{-2} - x^{-1} + \frac{1}{x-1} \Big) dx.$$

Il risultato è $I = 17/72 + \log 3/4$ e i calcoli intermedi sono lasciati al lettore per esercizio.

4. Integrazione per parti e per sostituzione

In questo paragrafo esaminiamo due tecniche per il calcolo di integrali.

4.1. Integrazione per parti.

Teorema 4.1. Siano $f, g \in C^1([a,b])$, allora si ha la formula di integrazione per parti

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \big[f(x)g(x)\big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Dim. Per la regola di derivazione del prodotto di funzioni abbiamo

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

per ogni $x \in (a,b)$. Integrando su $[a,b]$ e utilizzando il Teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\big[f(x)g(x)\big]_{x=a}^{x=b} = \int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Riordinando tale identità si ottiene la tesi. $\square$

Esempio 4.2. Esempi di integrazione per parti:

$$\int_0^1 xe^x dx = \big[xe^x\big]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 e^x dx = e - \big[e^x\big]_{x=0}^{x=1} = 1,$$
$$\int_0^{\pi/2} x \sin x dx = \big[-x\cos x\big]_{x=0}^{x=\pi/2} + \int_0^1 \cos x dx = \big[\sin x\big]_{x=0}^{x=\pi/2} = 1,$$
$$\int_1^{\mathrm{e}} x \log x dx = \Big[\frac{x^2}{2}\log x\Big]_{x=1}^{x=\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2}dx = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4},$$
$$\int_0^1 \arctan x dx = \big[x \arctan x\big]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\log 2}{2}.$$

4.2. Integrazione per sostituzione.

Teorema 4.3. Sia $\varphi\colon [y_0, y_1] \to [x_0, x_1]$ una funzione derivabile con derivata continua e tale che $\varphi(y_0) = x_0$ e $\varphi(y_1) = x_1$. Sia poi $f\colon [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora si ha la formula di integrazione per sostituzione

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_{y_0}^{y_1} f(\varphi(y))\varphi'(y)dy.$$

Formalmente, si pone $x = \varphi(y)$, si cambiano gli estremi di integrazione in modo corrispondente e si sostituisce $dx = \varphi'(y)dy$.

Dim. Per $y \in [y_0, y_1]$ consideriamo la funzione $H : [y_0, y_1] \to \mathbb{R}$

$$H(y) = \int_{x_0}^{\varphi(y)} f(x)dx = \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y)} f(x)dx = F(\varphi(y)),$$

dove F è la funzione integrale di f, ossia

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Allora, per il teorema di derivazione della funzione composta si ha

$$H'(y) = F'(\varphi(y))\varphi'(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y),$$

e integrando in y questa identità si ottiene

$$\int_{y_0}^{y_1} H'(y)dy = \int_{y_0}^{y_1} f(\varphi(y))\varphi'(y)dy.$$

Ora osserviamo che per il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha

$$\int_{y_0}^{y_1} H'(y)dy = H(y_1) - H(y_0) = \int_{x_0}^{\varphi(y_1)} f(x)dx - \int_{x_0}^{\varphi(y_0)} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx.$$

La formula di integrazione per sostituzione segue. $\square$

Esempio 4.4. Calcolare l'integrale

$$I = \int_1^2 \frac{x+3}{x\sqrt{x+2}}dx.$$

Soluzione. Utilizziamo il teorema di integrazione per sostituzione. Conviene porre

$$y = \sqrt{x+2}, \quad x = y^2 - 2, \quad dx = 2ydy.$$

Gli estremi di integrazione di trasformano nel seguente modo: $x = 1 \Rightarrow y = \sqrt{3}$ e $x = 2 \Rightarrow y = 4$. Dunque si ha

$$I = \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{y^2+1}{y(y^2-2)} 2ydy = 2\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{y^2+1}{y^2-2}dy.$$

Abbiamo l'integrale di una funzione razionale. Il grado del polinomio al numeratore e al denominatore sono uguali e quindi dobbiamo fare una divisione di polinomi. Alternativamente, possiamo decomporre la funzione razionale come segue

$$\frac{y^2+1}{y^2-2} = \frac{y^2-2+3}{y^2-2} = 1 + \frac{3}{y^2-2}.$$

Allora si tratta di calcolare l'integrale

$$I = 2\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{y^2+1}{y^2-2}dy = 2(2-\sqrt{3}) + 6\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{1}{y^2-2}dy.$$

L'integrale

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{1}{y^2-2}dy$$

si calcola con la tecnica dei fratti semplici ed omettiamo i dettagli.

Esempio 4.5. Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

Soluzione. Utilizziamo il teorema di integrazione per sostituzione. Conviene porre

$$x = \sin t, \quad t = \arcsin x, \quad dx = \cos t dt.$$

Gli estremi di integrazione si trasformano nel seguente modo: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, e $x = 1 \Rightarrow t = \pi/2$. Dunque

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt.$$

Ora

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\big[\sin 2t\big]_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Non è difficile verificare la correttezza del calcolo se si ricorda che I corrisponde all'area di un quarto di cerchio unitario.

4.3. Sostituzioni parametriche. Supponiamo di dover integrare una funzione data da un quoziente di due espressioni trigonometriche dove appaiono le funzioni $\sin x$ e $\cos x$. Attraverso le formule parametriche ci si può ricondurre all'integrale di una funzione razionale. Illustriamo il procedimento tramite un esempio.

Esempio 4.6. Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

Soluzione. Si pone $t = \tan(x/2)$. Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ si trasformano nel seguente modo

$$\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Inoltre, dalla relazione $x = 2\arctan(x)$ si ottiene la regola per trasformare il "differenziale"

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Nell'integrale in esame, gli estremi di integrazione si trasformano nel seguente modo: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, e $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$. Quindi si trova

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2t}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{2tdt}{1+2t-t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \log(2\sqrt{2}+3) - \log 2.$$

Il calcolo dell'integrale della funzione razionale si lascia per esercizio.

5. Integrali impropri

Esistono integrali impropri (generalizzati) di due tipi: 1) Integrali di funzioni su *intervalli non limitati*; 2) Integrali di *funzioni non limitate* su intervallo limitato.

5.1. Integrali impropri su intervallo illimitato.

Definizione 5.1. Sia $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Diciamo che f è integrabile in senso improprio su $[a,\infty)$ se esiste finito il limite

$$\lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx.$$

In questo caso, chiamiamo l'integrale sulla destra *integrale improprio di f* su $[a,\infty)$ e diciamo che l'integrale improprio *converge*.

Esempio 5.2. Calcolare l'integrale improprio

$$I = \int_4^\infty \frac{1}{x(\sqrt{x}-1)} dx.$$

Soluzione. Calcoliamo innanzitutto per ogni $M > 4$ l'integrale

$$\int_4^M \frac{1}{x(\sqrt{x}-1)} dx.$$

Utilizziamo il teorema di integrazione per sostituzione. Si pone $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2$, $dx = 2ydy$. Gli estremi di integrazione si trasformano in questo modo: $x = 4 \Rightarrow y = 2$, $x = M \Rightarrow y = \sqrt{M}$. Dunque, si trova

$$\int_4^M \frac{1}{x(\sqrt{x}-1)} dx = 2\int_2^{\sqrt{M}} \frac{1}{y(y-1)} dy.$$

Decomponendo in fratti semplici si ha

$$2\int_2^{\sqrt{M}} \frac{1}{y(y-1)} dy = -2\int_2^{\sqrt{M}} \frac{dy}{y} + 2\int_2^{\sqrt{M}} \frac{dy}{y-1} = 2\Big(\log \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} + \log 2 \Big).$$

In conclusione, passando al limite per $M \to \infty$

$$I = \lim_{M\to\infty} 2\Big(\log \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} + \log 2 \Big) = 2\log 2.$$

L'integrale improprio converge e ne abbiamo calcolato il valore esatto.

Esempio 5.3 (Fondamentale). Studiamo la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro reale $\alpha > 0$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

Nel caso $\alpha \neq 1$ si ha

$$\int_1^M \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{x=1}^{x=M} = \frac{M^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}.$$

Concludiamo che:

1) Se $\alpha > 1$ l'integrale converge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{M\to\infty} \frac{M^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$$

2) Se $0 < \alpha < 1$ l'integrale diverge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{M\to\infty} \frac{M^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \infty.$$

Nel caso $\alpha = 1$ si ha

$$\int_1^M \frac{1}{x} dx = \log M,$$

e quindi l'integrale diverge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{M\to\infty} \log M = \infty.$$

Riassumendo abbiamo la seguente situazione

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1, \\ \infty & 0 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Teorema 5.4 (Criterio del confronto). Siano $f, g \in C([a, +\infty))$ due funzioni continue tali che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \geq M$, per qualche $M > a$. Allora:

1) $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^\infty f(x)dx < \infty;$

2) $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx = \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^\infty g(x)dx = \infty.$

La dimostrazione è analoga a quella per le serie numeriche ed è omessa.

Definizione 5.5 (Ordine di infinitesimo per $x \to \infty$). Una funzione $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ si dice infinitesima di ordine $\alpha > 0$ rispetto ad $1/x$ per $x \to \infty$ se esiste finito e diverso da zero il limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = L \neq 0.$$

Dall'Esempio 5.3, tramite confronto asintotico deriva il seguente criterio di convergenza per integrali imporpri.

TEOREMA 5.6 (Criterio del confronto asintotico). Sia $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, infinitesima di ordine $\alpha > 0$ rispetto ad $1/x$ per $x \to \infty$. Allora:

1) Se $\alpha > 1$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ converge;
2) se $\alpha \leq 1$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.

Dim. Dimostriamo l'affermazione 1). Supponiamo ad esempio che sia

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = L > 0.$$

Dunque esiste un numero $M > 0$ tale che

$$0 \leq f(x) \leq \frac{2L}{x^\alpha}$$

per ogni $x \geq M$. Siccome l'integrale imporprio

$$\int_1^\infty \frac{2L}{x^\alpha} dx$$

converge per $\alpha > 1$, il risultato segue dal Teorema del confronto. La dimostrazione dell'affermazione 2) è analoga. $\square$

ESEMPIO 5.7. Al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri l'integrale improprio

$$I_\alpha = \int_1^\infty \frac{x^\alpha}{1 + 1/x} \log\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) dx.$$

1) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che l'integrale improprio risulti convergente.
2) Calcolare I_α per $\alpha = -2$.

Soluzione. 1) Per rispondere alla prima domanda osserviamo in primo luogo che

$$\log\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) = \frac{1}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big), \quad x \to \infty,$$

dove $o(1/x)$ indica una quantità che converge a zero più velocemente di $1/x$ quando $x \to \infty$. Dunque, la funzione integranda è

$$\frac{x^\alpha}{1 + 1/x} \log\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) = \frac{1}{x^{1-\alpha}}(1 + o(1)),$$

dove $o(1)$ indica una quantità infinitesima al tendere di $x \to \infty$. Dunque la funzione integranda è infinitesima di ordine $1 - \alpha$ rispetto ad $1/x$. Per il *Criterio del confronto asintotico*, l'integrale converge solo se

$$1 - \alpha > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 0.$$

2) Quando $\alpha = -2$ l'integrale imporprio certamente converge. Per calcolarlo osserviamo che

$$\frac{d}{dx} \log^2\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) = 2 \log\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) \cdot \frac{-x^{-2}}{1 + 1/x},$$

e quindi
$$\int_1^\infty \frac{x^{-2}}{1+1/x}\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big)dx = \lim_{M\to\infty}\Big[-\frac{1}{2}\log^2\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big]_{x=1}^{x=M} = \frac{1}{2}\log^2 2.$$
La primitiva si può anche determinare tramite una serie di sostituzioni.

5.2. Integrali impropri di funzioni non limitate. Discutiamo ora il caso di integrali impropri di funzioni non limitate.

Definizione 5.8. Sia $f\colon (a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua (non necessariamente limitata intorno all'estremo a). Diciamo che f è integrabile in senso improprio su $(a,b]$ se esiste finito il limite
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$
In questo caso, diciamo che l'integrale improprio a destra *converge*.

Esempio 5.9 (Fondamentale). Studiamo la convergenza del seguente integrale improprio a variare di $\alpha>0$
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx.$$

Nel caso $\alpha\neq 1$ si ha
$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \Big[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big]_{x=\varepsilon}^{x=1} = \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$
Da ciò concludiamo che:

1) Se $\alpha>1$ l'integrale diverge
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \infty$$
2) Se $0<\alpha<1$ l'integrale converge
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Nel caso $\alpha=1$ si ha
$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = -\log\varepsilon$$
e quindi l'integrale diverge
$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\log\varepsilon = \infty.$$

Riassumendo, abbiamo la seguente situazione
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \infty, & \alpha\geq 1\\ \dfrac{1}{1-\alpha}, & 0<\alpha<1.\end{cases}$$

Definizione 5.10 (Ordine di infinito per $x \to 0^+$). Una funzione continua $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ si dice un infinito di ordine $\alpha > 0$ rispetto ad $1/x$ per $x \to 0^+$ se esiste finito

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} x^\alpha f(x) = L \neq 0.$$

Per discutere la convergenza di integrali di funzioni non limitate è utile il seguente strumento.

Teorema 5.11 (Criterio del confronto asintotico). Sia $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, infinita di ordine $\alpha > 0$ rispetto ad $1/x$ per $x \to 0^+$. Allora:

1) Se $\alpha \geq 1$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ diverge.

2) Se $0 < \alpha < 1$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ converge.

Dim. La dimostrazione segue per confronto con $1/x^\alpha$ ed è omessa. □

Esempio 5.12. Studiare la convergenza del seguente integrale improprio

$$\int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin x}\,\log\left(\frac{\pi+x}{2\pi}\right)}{(\pi-x)^2}dx.$$

Soluzione. Osserviamo che la funzione integranda non è definita per $x = \pi$ mentre è definita e continua in $[0,\pi)$. Per comodità operiamo il cambiamento di variabile $y = \pi - x, dx = -dy$ ottenendo

$$\int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin x}\,\log\left(\frac{\pi+x}{2\pi}\right)}{(\pi-x)^2}dx = \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin y}\,\log\left(1-\frac{y}{2\pi}\right)}{y^2}dy.$$

Per $y \to 0^+$ si hanno gli sviluppi

$$\sin y = y + o(y) \qquad\qquad \log\left(1-\frac{y}{2\pi}\right) = -\frac{y}{2\pi} + o(y),$$

dove $o(y)$ indica una quantità che tende a 0 più velocemente di y. Dunque, la funzione integranda è

$$\frac{\sqrt{\sin y}\,\log\left(1-\frac{y}{2\pi}\right)}{y^2} = \frac{y\big(-\frac{1}{2\pi}+o(1)\big)\sqrt{y}(1+o(1))}{y^2} = \frac{-\frac{1}{2\pi}+o(1)}{y^{1/2}}.$$

La funzione integranda è un infinito di ordine $1/2$ rispetto ad $1/y$ per $y \to 0^+$. Siccome $1/2 < 1$ l'integrale improprio converge.