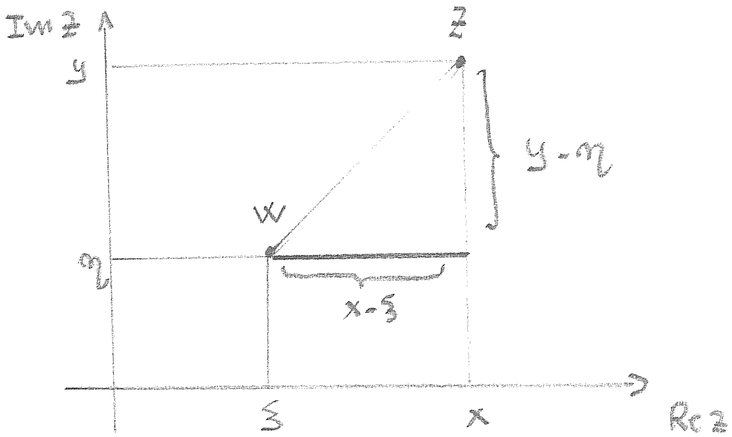
Numeri complessi come spazio metrico

Definiamo la distanza fra due numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$ nel seguente modo:

$$d(z,w) = |z-w| .$$

Si tratta della lunghezza del segmento che congiunge z e w:



$z = x + iy$

$w = \xi + i\eta$

Osserviamo che

$$|z-w| = |x+iy-\xi-i\eta| = |x-\xi+i(y-\eta)| =$$

$$= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} .$$

La distanza verifica:

(1) $d(z,w) = 0 \iff |z-w| = 0 \iff z-w=0 \iff z=w$

(2) $d(z,w) = |z-w| = |w-z| = d(w,z)$

(3) $d(z,w) \leq d(z,\zeta) + d(\zeta,w)$ (Dis. Triangolare).

<u>Esempio 1</u> Fissati $z_0 \in \mathbb{C}$ ed $r \geq 0$, l'insieme

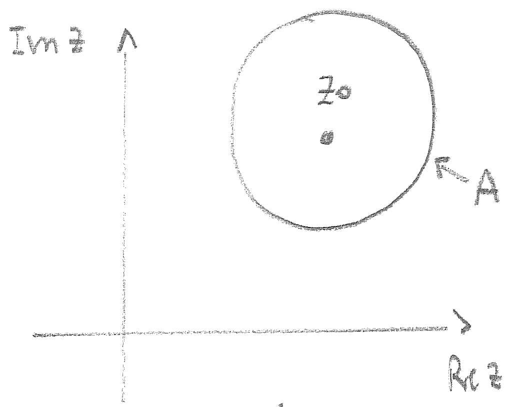
$$A = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r \}$$

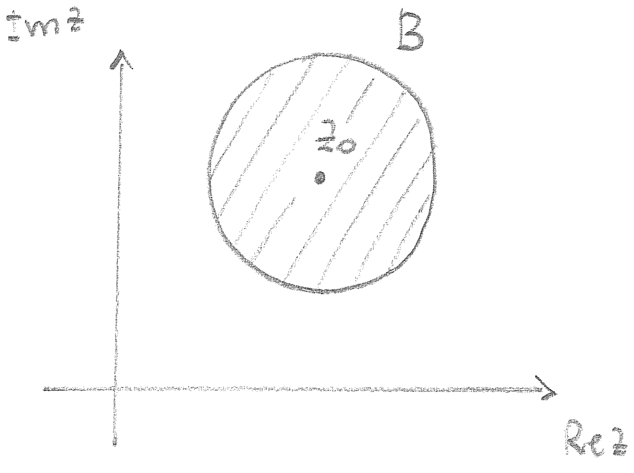
è una circonferenza di raggio $r \geq 0$ e centro z_0.

<u>Esempio 2</u> L'insieme

$$B = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r \}$$

è tutto il cerchio (bordo incluso).

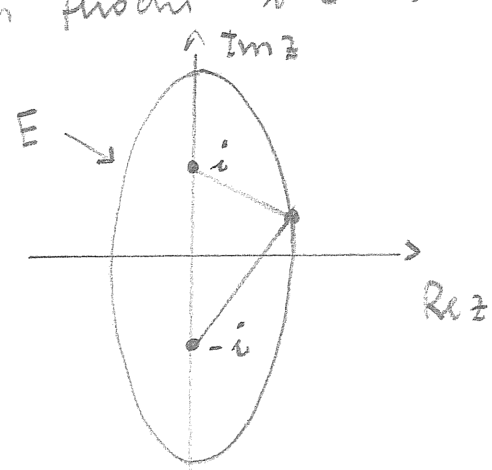




<u>Esempio 3</u> L'insieme

$$E = \{ z \in \mathbb{C} : |z - i| + |z + i| = 4 \}$$

è un'ellisse di fuochi i e $-i$



Polinomi complessi

Definizione Siano $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ numeri complessi. Un'espressione della forma

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

si dice polinomio complesso della variabile $z \in \mathbb{C}$. Se $a_n \neq 0$ diremo che $P(z)$ ha grado $n \in \mathbb{N}$.

Teorema (Fondamentale dell'Algebra) Sia $P(z)$ un polinomio complesso di grado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$. Allora l'equazione

$$P(z) = 0$$

ha esattamente n soluzioni (contate con la loro molteplicità), dette radici del polinomio.

Osservazione 1 Sia $P(z)$ un polinomio complesso di grado $n \geq 1$ con $a_n = 1$. Siano $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ le sue n radici. Allora possiamo fattorizzare

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n).$$

Osservazione 2   Supponiamo che il polinomio complesso

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

abbia coefficienti reali:

$$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$P(z) = 0 \iff P(\bar{z}) = 0.$$

Quindi nota una radice z, se ne conosce anche una seconda $\bar{z}$.

Prova:

$$P(z) = 0 \iff \overline{P(z)} = 0$$

E inoltre

$$\overline{P(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\, \overline{z}^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}^k = P(\bar{z}).$$