Se $y=0$ c'è la sola soluzione $y=0$.
Se $y>0$ risolviamo e troviamo

$$x_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y}$$

con $\sqrt{1-y^2}$ definita, essendo $y \in [0,1]$.
Abbiamo $x_\pm > 0$. Dobbiamo scegliere la soluzione che verifica $x_\pm \leq 1$.

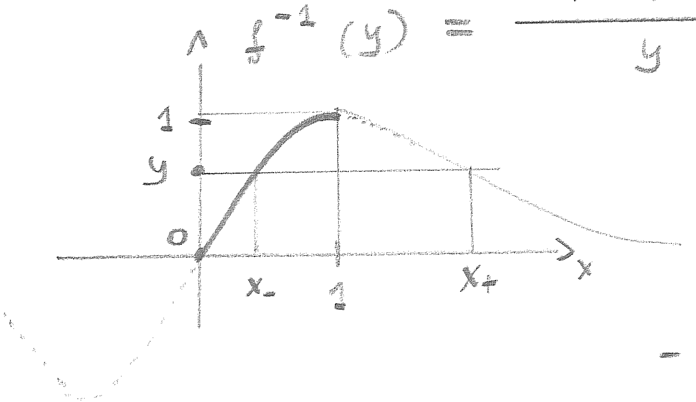
$$x_+ \leq 1 \iff 1+\sqrt{1-y^2} \leq y$$
$$\iff \sqrt{1-y^2} \leq \underbrace{y-1}_{\substack{\text{NEGATIVO}\\ \leq 0}} \qquad \underline{\underline{\text{NO}}}$$

Quindi deve essere

$$x_- \leq 1 \iff 1-\sqrt{1-y^2} \leq y$$
$$\iff 1-y \leq \sqrt{1-y^2}$$
$$\iff 1-2y+y^2 \leq 1-y^2$$
$$\iff y^2-y \leq 0$$
$$\iff 0 < y \leq 1 \qquad \underline{\underline{\text{SI}}}$$

La funzione inversa è

$$f^{-1}(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}}, \quad y \in [0,1].$$



$\square$

Definizione Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice (strettamente) crescente se

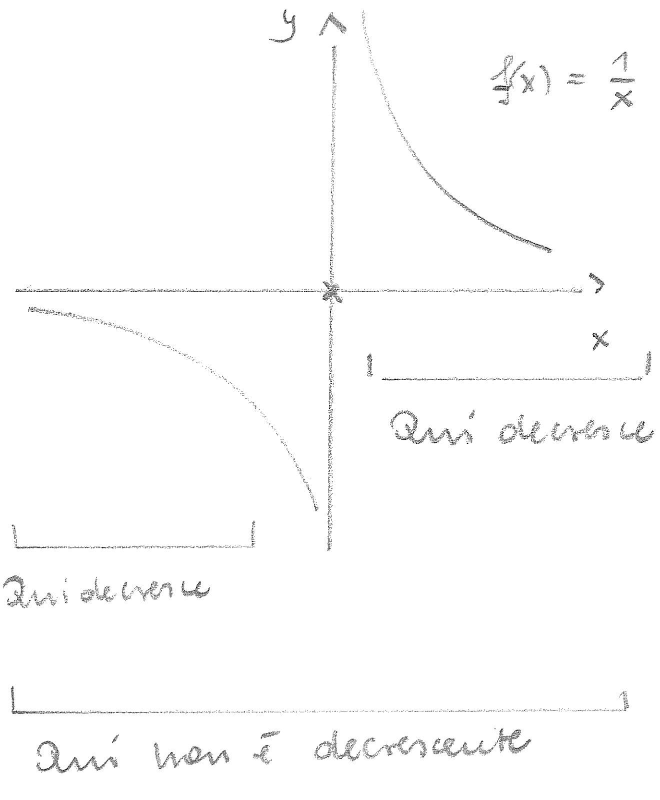
$$x_1 \underset{(<)}{\leq} x_2 \,, \quad x_1, x_2 \in A \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \underset{(<)}{\leq} f(x_2) \,.$$

Si dice (strettamente) decrescente se

$$x_1 \underset{(<)}{\leq} x_2 \quad x_1, x_2 \in A \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \underset{(>)}{\geq} f(x_2) \,.$$

Esempio $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$,

NON è decrescente:



Infatti:

$$-1 < 1 \quad \not\Longrightarrow \quad f(-1) > f(1)$$

FALSO

<u>Esempio</u> Per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione $f(x) = x^n$ è strettamente crescente su $[0,\infty)$.

Proviamo che per $x \geq 0$ e $h > 0$ si ha $f(x+h) > f(x)$,

ovvero:

$$(*) \qquad (x+h)^n > x^n .$$

Formula del Binomio di Newton:

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k h^{n-k}$$

$$= x^n + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k}}_{\geq 0} + \underbrace{h^n}_{> 0}$$

Quindi la (*) è equivalente a

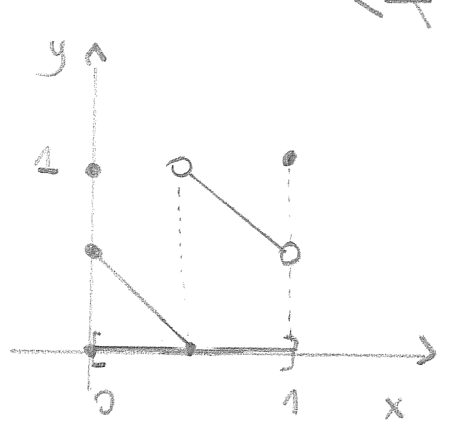
$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k}}_{\geq 0} + \underbrace{h^n}_{> 0} > 0 .$$

verificata. $\square$

<u>Osservazione</u> Si ha

$$f \text{ strett. monotona} \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow \end{array} f \text{ è } 1\text{-}1$$

Esempio:



$f : [0,1] \to [0,1]$

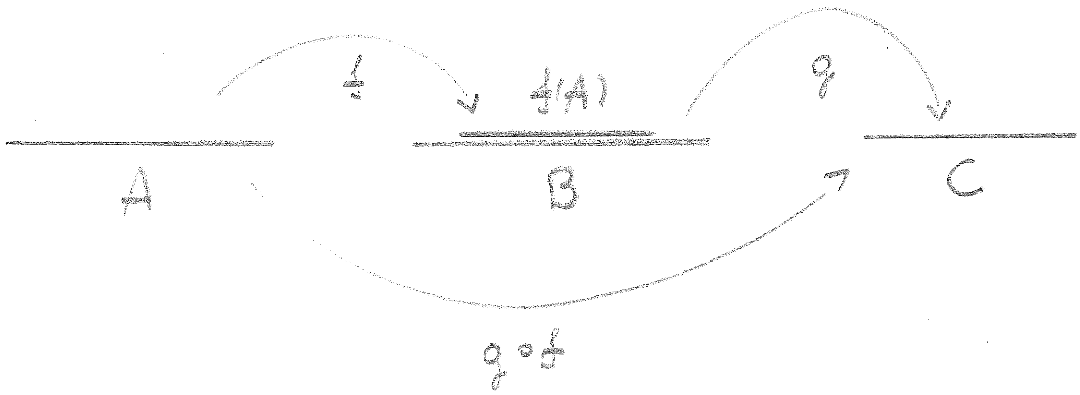
è 1-1 e su

ma f non è

né crescente né decrescente.

<u>Definizione</u> (Funzione composta) Siano $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Si definisce la funzione composta $g \circ f : A \to C$ ponendo

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \quad x \in A.$$



<u>Esempio</u> Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ e $g : [-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{1+x}$.

Osserviamo che

$$f(\mathbb{R}) = [0, \infty) \subset [-1, \infty) = D(g).$$

Possiamo comporre $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{1+f(x)} = \sqrt{1+x^4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

<u>Osservazione:</u>

- f crescente e g crescente $\Rightarrow$ $g \circ f$ crescente
- f crescente e g decrescente $\Rightarrow$ $g \circ f$ decrescente
- f decrescente e g decrescente $\Rightarrow$ $g \circ f$ crescente

Osservazione

Sia $f : A \to B$ 1-1 e su.

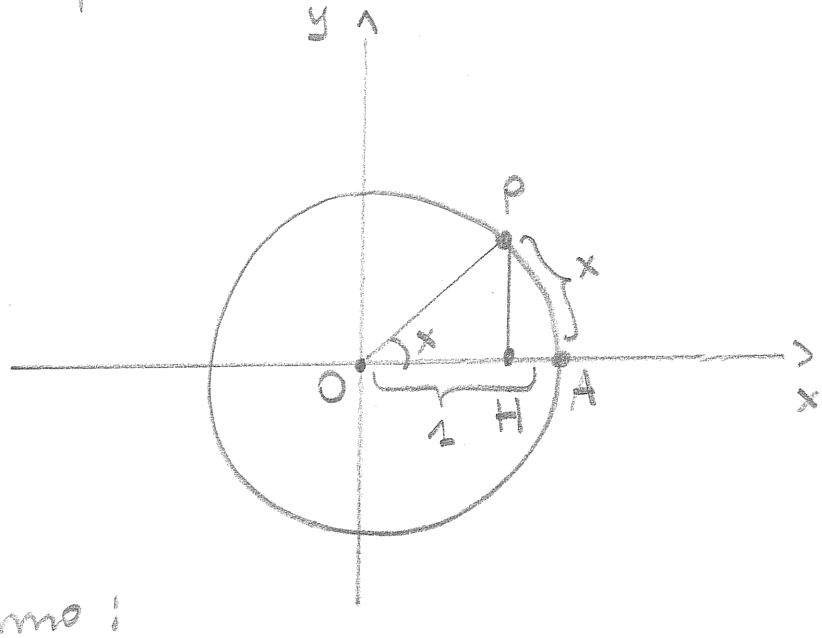
Allora

$$f^{-1} \circ f = \text{Identità su } A,$$

$$f \circ f^{-1} = \text{Identità su } B.$$

Funzioni Trigonometriche

Consideriamo la circonferenza unitaria.
Sia P un punto sulla circonferenza.
Misuriamo l'angolo $P\hat{O}A$ in radianti.
Sia H la proiezione di P sull'asse delle x:

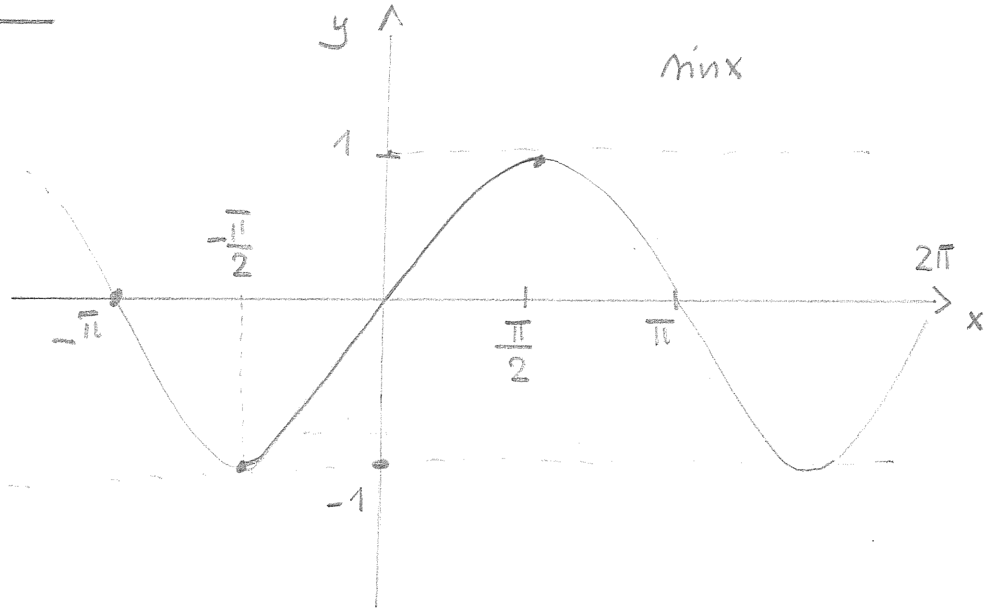


Definiamo:

$\cos x = \overline{OH}$ lunghezza con segno

$\sin x = \overline{PH}$ " " "

Grafici:

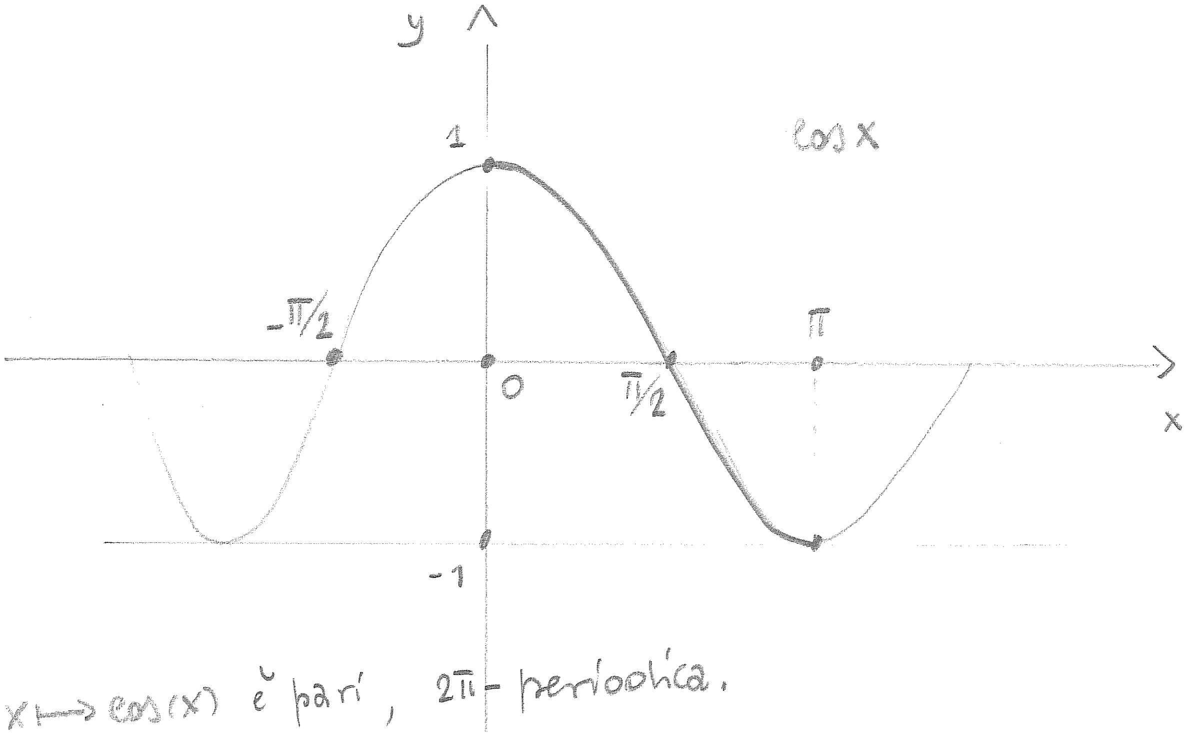


$x \mapsto \sin(x)$ è dispari, 2π-periodica.

Inoltre:

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1] \quad \text{è 1-1 e su.}$$

(strett. cresc.)



$x \mapsto \cos(x)$ è pari, 2π-periodica.

Inoltre:

$$\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1] \quad \text{è 1-1 e su}$$

(strett. decr.)