Esercizio 1 Calcolare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

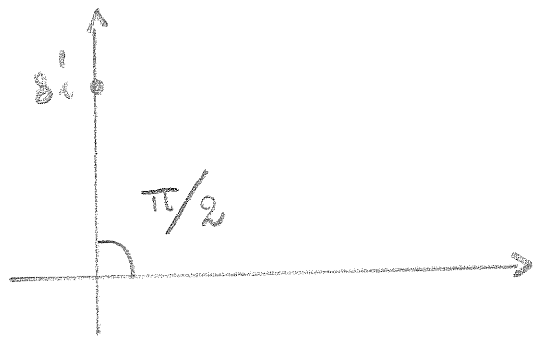
$$z^3 = 8i.$$

Ovvero: calcolare le radici terze di $8i$.

Risoluzione. Scriviamo $8i$ in forma esponenziale:

$$R = |8i| = 8 \quad \text{modulo}$$

$$\varphi = \arg(8i) = \frac{\pi}{2} \quad \text{argomento}$$



Cerchiamo soluzioni della forma $z = re^{i\vartheta}$ con $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$ da determinare.

Abbiamo

$$8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}} = z^3 = r^3 e^{i3\vartheta}.$$

Otteniamo $\quad r^3 = 8 \iff r = 2$

E poi

$$3\vartheta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{con } k = 0, 1, 2$$

ovvero

$$\vartheta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2k}{3}\pi \qquad k = 0, 1, 2$$

Precisamente: $\vartheta_0 = \frac{\pi}{6}$ $\quad \vartheta_1 = \frac{5}{6}\pi$, $\vartheta_2 = \frac{3}{2}\pi$.

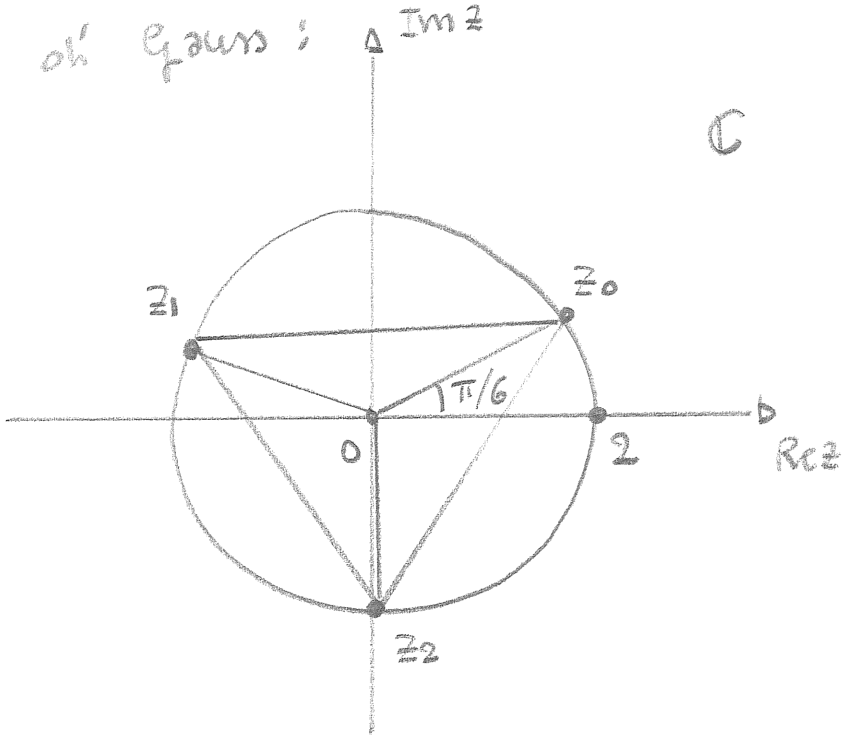
Le soluzioni sono:

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2e^{i\frac{5}{6}\pi} = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$
$$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{3}{2}\pi} = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right)$$
$$= 2(0 - i) = -2i$$

Nel piano di Gauss:



Esercizio 2 Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell' equazione

$$z^4 - 2i\sqrt{3}\, z^2 - 4 = 0$$

e rappresentarle nel piano di Gauss.

Risoluzione. Poniamo $w = z^2$. L'equazione diviene

$$w^2 - 2i\sqrt{3}\, w - 4 = 0 .$$

Possiamo usare la formula risolutiva delle equazioni di grado 2:

$$w = \frac{2i\sqrt{3} \pm \sqrt{4i^2 \cdot 3 + 16}}{2}$$

$$= \frac{2i\sqrt{3} \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$

$$= \frac{2i\sqrt{3} \pm 2}{2} = \pm 1 + i\sqrt{3} .$$

Dobbiamo risolvere le due equazioni

$$z^2 = 1 + i\sqrt{3} = w_1 ,$$

$$z^2 = -1 + i\sqrt{3} = w_2 .$$

Risolvo la prima. Scrivo w_1 in forma esponenziale:

$$|w_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

Osservo che w_1 è nel primo quadrante.

Quindi
$$\arg(w_1) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

In conclusione
$$w_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Ovvero $R = 2$ e $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Ottengo l'equazione per $z = re^{i\vartheta}$ con $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$
$$w_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = z^2 = r^2 e^{i2\vartheta}.$$

Dunque
$$r^2 = 2 \iff r = \sqrt{2}$$
$$2\vartheta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{con } k = 0, 1$$

Gli angoli sono
$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad \vartheta_1 = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7}{6}\pi.$$

Trovo le soluzioni
$$z_0 = \sqrt{2}e^{i\vartheta_0} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

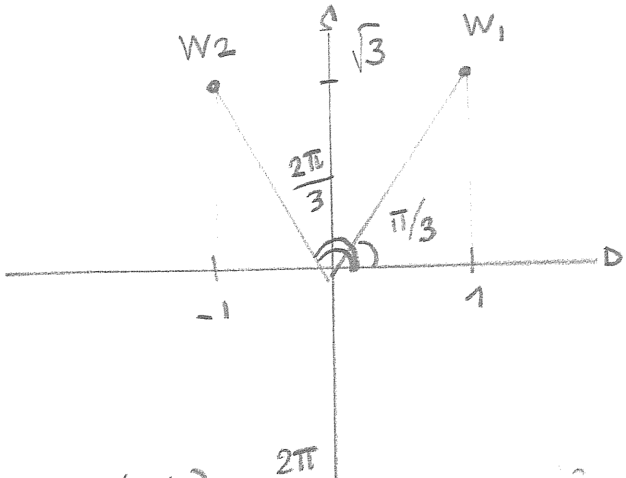
$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\vartheta_1} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$$
$$= -\sqrt{\frac{3}{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Risolvo ora $z^2 = w_2 = -1 + i\sqrt{3}$.

Chiaramente

$$|w_2| = 2 .$$

Il modulo di w_2 è:



Dunque $\arg(w_2) = \frac{2\pi}{3}$.

Ho l'equazione

$$\rho^2 e^{i2\vartheta} = z^2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Trovo $\rho = \sqrt{2}$ e poi

$$2\vartheta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad k = 0, 1 ,$$

ovvero $\qquad k=0$

$$\vartheta_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$\vartheta_3 = \frac{4\pi}{3}$$

le soluzioni sono $z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $z_3 = -z_2$.