Esercizio 6 Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro fissato.
Disegnare nel piano complesso il seguente insieme

$$S_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} \; : \; \frac{\bar{z}+1-i\alpha}{z+1} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Risoluzione. In primo luogo deve essere $z+1 \neq 0$
ovvero $z \neq -1$.

Dobbiamo annullare la parte immaginaria di $\dfrac{\bar{z}+1-i\alpha}{z+1}$.

Conti:

$$\frac{\bar{z}+1-i\alpha}{z+1} = \frac{\bar{z}+1-i\alpha}{z+1} \; \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}+1} =$$

$$= \frac{\bar{z}^2 + \bar{z} + \bar{z} + 1 - i\alpha\bar{z} - i\alpha}{|z|^2 + z + \bar{z} + 1}$$

$z = x+iy$

$$= \frac{(x-iy)^2 + 2(x-iy) + 1 - i\alpha(x-iy) - i\alpha}{x^2+y^2+2x+1}$$

$$= \frac{x^2 - 2ixy - y^2 + 2x - 2iy + 1 - i\alpha x - \alpha y - i\alpha}{x^2+y^2+2x+1}$$

Annullo la parte immaginaria:

$$-2xy - 2y - \alpha x - \alpha = 0$$

$$\Updownarrow$$

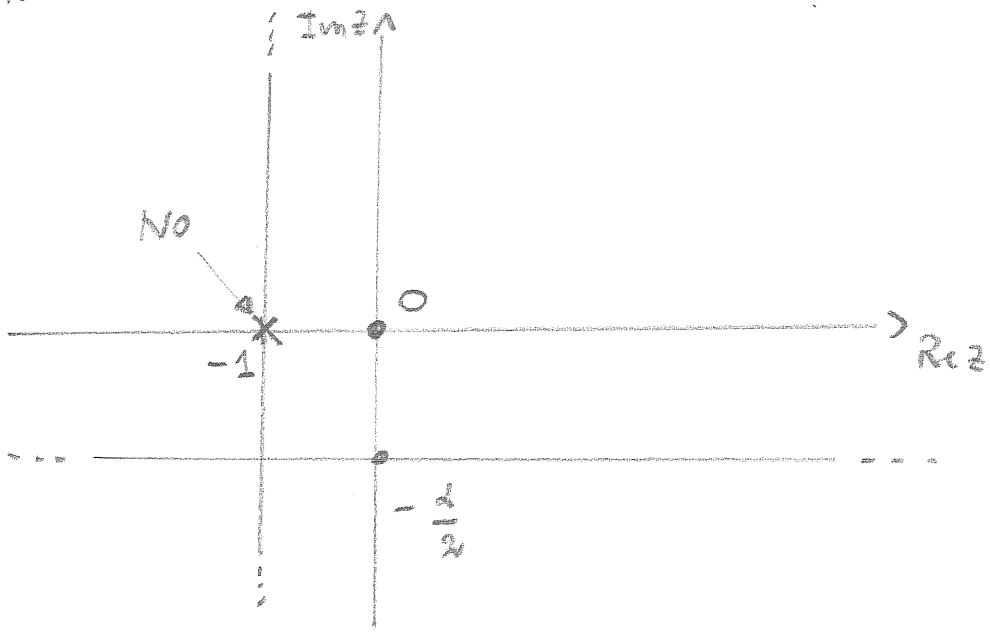
$$2y(x+1) + \alpha(x+1) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(x+1)(2y+\alpha) = 0.$$

Quindi deve essere $x+1=0$ oppure $2y+\alpha=0$.

Nel primo caso si ha la retta $x=-1$




Nel secondo caso si ha la retta $y = -\frac{\alpha}{2}$.

□

Esercizio 7 Determinare $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $z_0 = i$ sia radice del polinomio

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + \lambda z^2 - 2z + 2 .$$

Calcolare quindi tutte le radici.

Soluzione.

$$0 = P(i) = i^4 - 2i^3 + \lambda i^2 - 2i + 2$$
$$= 1 + \cancel{2i} - \lambda - \cancel{2i} + 2$$
$$= 3 - \lambda$$

Quindi troviamo $\lambda = 3$. Il polinomio è

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 .$$

I coefficienti sono reali. Due radici sono

$$z_0 = i \quad e \quad \bar{z}_0 = -i$$

Le altre radici saranno $z_1 \in \mathbb{C}$ e $\bar{z}_1 \in \mathbb{C}$ da determinare. Avremo la fattorizzazione:

$$P(z) = (z-i)(z+i)(z-z_1)(z-\bar{z}_1)$$
$$= (z^2+1)(z^2 - z\bar{z}_1 - z_1 z + |z_1|^2)$$
$$= z^4 - z^3(\bar{z}_1 + z_1) + z^2 |z_1|^2$$
$$+ z^2 - z(\bar{z}_1 + z_1) + |z_1|^2$$

Confronto i coefficienti:

$$\begin{cases} -2 = -(\bar{z}_1 + z_1) \\ 3 = |z_1|^2 + 1 \\ -2 = -(\bar{z}_1 + z_1) \\ 2 = |z_1|^2 \end{cases} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right] \text{doppioni}$$

Ho il sistema

$$\begin{cases} z_1 + \bar{z}_1 = 2 \\ |z_1|^2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} Re(z_1) = 1 \\ |z_1|^2 = 2 \end{cases}$$

Se $z_1 = x_1 + i y_1$ dovrà essere $x_1 = 1$ e quindi:

$$2 = |z_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 = 1 + y_1^2$$

Deduco: $y_1^2 = 1 \iff y_1 = \pm 1$.
Trovo la coppia di soluzioni

$$z_1 = x_1 + i y_1 = 1 + i$$
$$\bar{z}_1 = 1 - i.$$

Conclusione. Le quattro radici di P sono

$$\pm i \quad e \quad 1 \pm i.$$

$\square$

Esercizio 8 Disegnare nel piano complesso l'insieme delle $z \in \mathbb{C}$ tali che

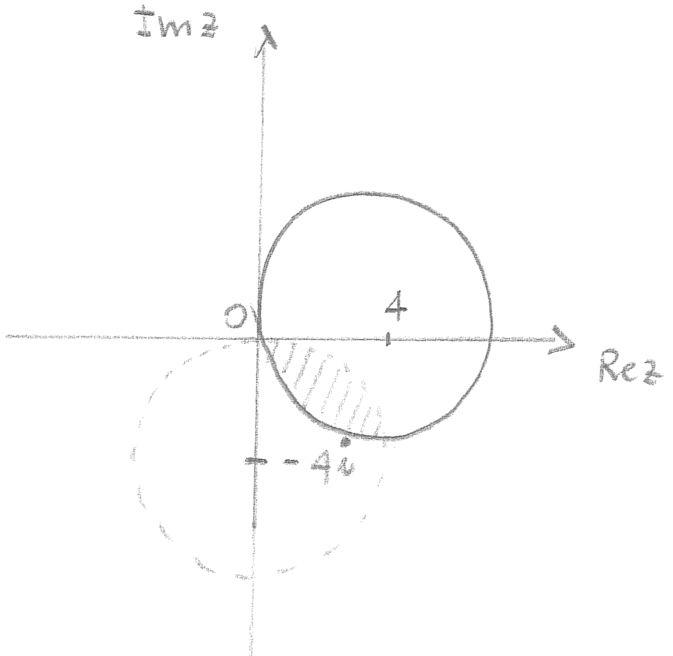
$$(*) \qquad \frac{\sqrt{4-|z-4|}}{\sqrt{4-|z+4i|}} > 1 .$$

Soluzione: Abbiamo le restrizioni

$$(1) \qquad 4-|z-4| \geq 0 \iff |z-4| \leq 4$$

$$(2) \qquad 4-|z+4i| > 0 \iff |z+4i| < 4$$

Disegno:




Possiamo elevare al quadrato la $(*)$ e ottenere

$$\frac{4-|z-4|}{4-|z+4i|} > 1 \iff 4-|z-4| > 4-|z+4i|$$

$$\iff |z+4i| > |z-4|$$

$$\iff |z+4i|^2 > |z-4|^2$$

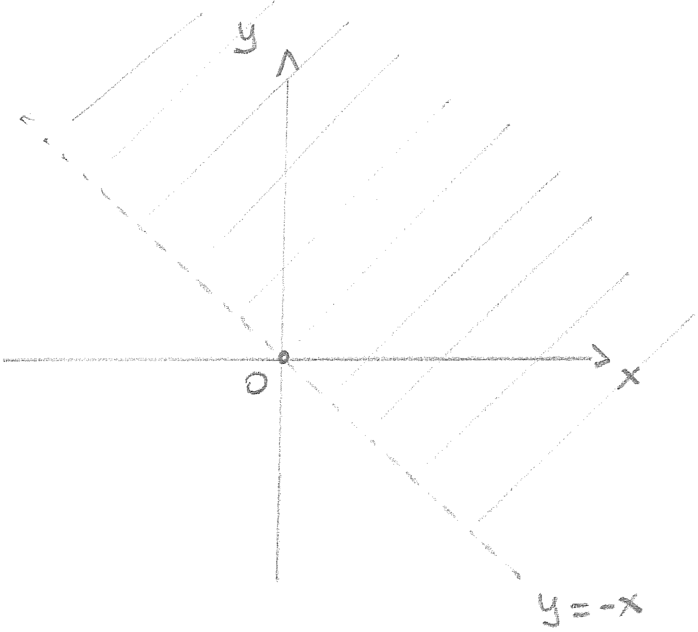
A questo punto scriviamo $z = x + iy$:

$$|x+iy+4i|^2 > |x+iy-4|^2 \iff x^2 + (y+4)^2 > (x-4)^2 + y^2$$

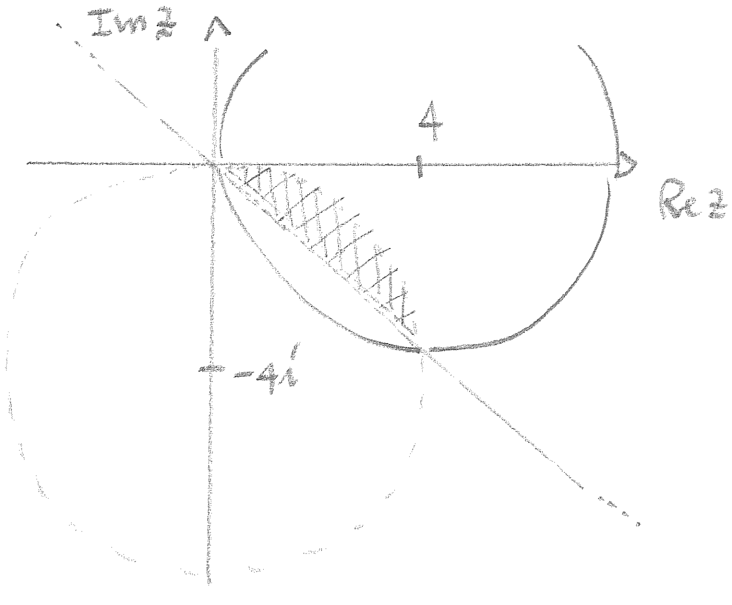
ovvero

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 8y + \cancel{16} > \cancel{x^2} - 8x + \cancel{16} + \cancel{y^2}$$

e infine $\quad y > -x$, ovvero:




Le soluzioni sono dunque:




$\square$