Osserviamo che

$$1 \leq \sqrt{1+\frac{1}{n^3}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^3}} \leq \sqrt{2}+1 \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

e dunque

$$\frac{2}{\sqrt{2}+1}\,\frac{1}{n^{\alpha+\frac{3}{2}}} \leq a_n \leq \frac{2}{n^{\alpha+3/2}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Siccome

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+3/2}} < \infty \iff \alpha+\frac{3}{2} > 1 \iff \alpha > -\frac{1}{2},$$

dal Teorema del Confronto segue che la serie data converge se e solo se $\alpha > -\frac{1}{2}$.

$\square$

ESERCIZIO 21 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{1+n+x^2n^2}.$$

Soluzione. Distinguiamo i due casi:

1° caso: $x=0$;

2° caso: $x \neq 0$.

Se $x=0$ la serie diventa $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Siccome $\sqrt{n+1} \leq \sqrt{2n} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{n}$ per $n \geq 1$,
avremo

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}\ n^{1/2}}.$$

Dal momento che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = \infty$$

(infatti $\frac{1}{2} < 1$), dal Teorema del Confronto segue che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \infty.$$

Esamino il caso $x \neq 0$. In questo caso si ha:

$$\frac{\sqrt{n+1}}{1+n+x^2n^2} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{x^2n^2} \leq \frac{\sqrt{2n}}{x^2n^2} = \frac{\sqrt{2}}{x^2}\ \frac{1}{n^{2-\frac{1}{2}}}$$

Siccome

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty \quad \text{(fatto noto)},$$

dal Teorema del Confronto segue che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{1+n+x^2n^2} < \infty.$$

$\square$

ESERCIZIO 22 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$, con $k \neq 0$, studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|n-x|}{k}} .$$

Soluzione. La serie è a termini positivi. Possiamo usare il Criterio della Radice.

Sia

$$L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{e^{-\frac{|n-x|}{k}}} = \lim_{n \to \infty} e^{-\frac{|n-x|}{kn}} .$$

Osserviamo che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|n-x|}{nk} = \lim_{n \to \infty} \frac{\left|1 - \frac{x}{n}\right|}{k} = \frac{1}{k}$$

e quindi

$$L = e^{\lim_{n \to \infty} -\frac{|n-x|}{kn}} = e^{-\frac{1}{k}} .$$

Ci sono due casi:

1° Caso: $L < 1 \Longrightarrow$ la serie converge.

Precisamente:

$$L < 1 \Longleftrightarrow e^{-\frac{1}{k}} < 1 \Longleftrightarrow -\frac{1}{k} < 0$$

$$\Longleftrightarrow k > 0$$

2° caso: $L > 1 \Rightarrow$ La serie diverge.

Precisamente:

$$L > 1 \iff k < 1.$$

Il caso $L = e^{-\frac{1}{k}} = 1$ non si presenta.

Conclusione:

$$\text{Serie converge} \iff k > 0.$$

$\square$

ESERCIZIO 23. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}\,(-1)^n.$$

Sol. Abbiamo

$$a_n = \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} \geq 0$$

e quindi siamo in presenza di una serie a segno alterno. Usiamo il Criterio di Leibniz.
Verifichiamo le ipotesi del Teorema:

(1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesima:

$$\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \overset{\sin \text{ è continua e } \sin(0)=0}{\Longrightarrow} \quad \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\overset{\sqrt[3]{\cdot} \text{ è cont.}}{\Longrightarrow} \quad \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Dunque,

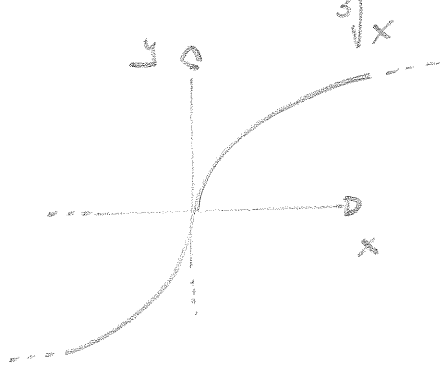
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

(2) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente. Dobbiamo controllare che

$$a_{n+1} \leq a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ragiono così:

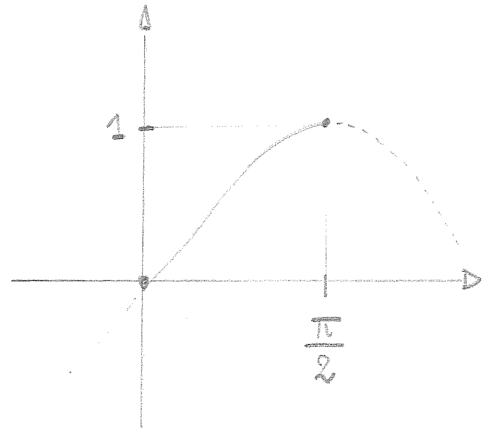
$$x \longmapsto \sqrt[3]{x} \quad \text{è crescente}$$



Inoltre, sull'intervallo $[0, \pi/2]$

$$x \longmapsto \sin(x) \qquad x \in [0, \pi/2]$$

è crescente



Di conseguenza

$$f(x) = \sqrt[3]{\sin(x)}, \quad x \in [0, \pi/2]$$

è crescente.

Deduciamo che

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Longrightarrow \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} < \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$$

e quindi $a_{n+1} < a_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per il Criterio di Leibniz la serie data converge.

□

ESERCIZIO 24 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{5^n \log(n+1)} (x^2 - 2x)^n.$$

SOLUZIONE.
La serie non è a termini positivi. Iniziamo con la convergenza assoluta.