Studio di funzione Tema 1

$$f(x) = \log \cosh x - \log|\sinh x - 1|$$

Dominio Deve essere

$$|\sinh x - 1| \neq 0 \iff \sinh x - 1 \neq 0$$

$$\iff \sinh x \neq 1$$

$$\iff e^{x} - e^{-x} \neq 2$$

Posto $e^x = t$ si ottiene

$$t - \frac{1}{t} \neq 2 \iff t^2 - 1 \neq 2t$$

$$\iff t^2 - 2t - 1 \neq 0 \iff t \neq 1 \pm \sqrt{2}$$

Siccome $t = e^x > 0$, si trova $e^x = t = 1 + \sqrt{2}$

ovvero $x \neq \log(1+\sqrt{2})$.

Dunque

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\log(1+\sqrt{2})\}$$

Segno Partiamo da

$$f(x) = \log \frac{\cosh x}{|\sinh x - 1|}$$

Dunque:

$$f(x) > 0 \iff \frac{\cosh x}{|\sinh x - 1|} > 1$$

$$\iff \underset{(\text{positivo})}{\cosh x} > |\sinh x - 1|$$

$$\iff \cosh^2 x > |\sinh x - 1|^2 =$$

$$= \sinh^2 x - 2\sinh x + 1$$

Uso $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ e trovo:

$$f(x) > 0 \iff 0 > -2 \sinh x$$

$$\iff \sinh x > 0$$

$$\iff x > 0$$

Stessi conti: $f(x) = 0 \iff x = 0$

Limiti Osserviamo che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cosh x}{|\sinh x - 1|} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x} - 2} = 1$$

In modo analogo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\cosh x}{|\sinh x - 1|} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{-e^x + e^{-x} + 2} = 1$$

Quindi

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \log \frac{\cosh x}{|\sinh x - 1|} = 0$$

Inoltre

$$\lim_{x \to \log(1+\sqrt{2})} f(x) = +\infty$$

Asintoti :

$y = 0$ Asintoto orizzontale a $\pm\infty$

$x = \log(1+\sqrt{2})$ Asintoto verticale

<u>Derivabilità</u> f è derivabile in tutto il suo dominio.

<u>Derivata</u> Conti:

$$f'(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} - \frac{\cosh x}{\sinh x - 1}$$

$$= \frac{\sinh^2 x - \sinh x - \cosh^2 x}{\cosh x \ (\sinh x - 1)}$$

Usiamo di nuovo il fatto noto: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.
Si trova

$$f'(x) = \frac{-1 - \sinh x}{\cosh x \ (\sinh x - 1)}$$

<u>Segno di $f'(x)$</u>

- $\cosh x \geq 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\sinh x - 1 > 0 \iff x > \log(1+\sqrt{2})$
- $-1 - \sinh x > 0 \iff \sinh x < -1$

$$\iff e^x - e^{-x} < -2$$

Poniamo $t = e^x$, si trova

$$t - \frac{1}{t} + 2 < 0 \iff t^2 - 1 + 2t < 0$$
$$\iff t^2 + 2t - 1 < 0$$

Radici di $t^2 + 2t - 1 = 0$: $t = -1 \pm \sqrt{2}$

Dunque

$$t^2 - 2t - 1 < 0 \iff -1 - \sqrt{2} < t < -1 + \sqrt{2}.$$

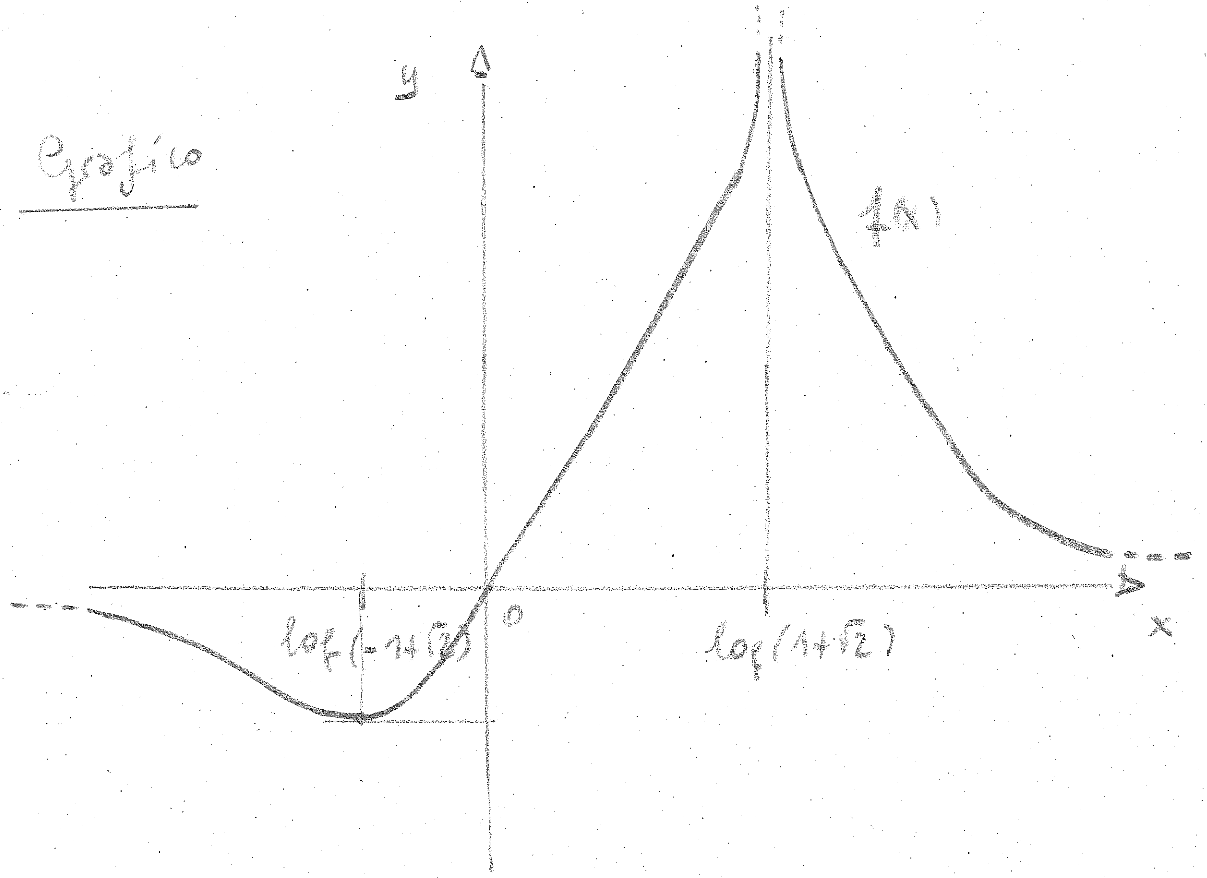
Noi abbiamo la restrizione $t > 0$.
In definitiva si trova:

$$-1 - \sinh x > 0 \iff e^x < -1 + \sqrt{2}$$
$$\iff x < \log(-1 + \sqrt{2})$$

Conclusione

	$x < \log(-1+\sqrt{2})$	$\log(-1+\sqrt{2}) < x < \log(1+\sqrt{2})$ (contiene 0)	$x > \log(1+\sqrt{2})$
$\cosh x$	$+++$	$+++$	$+++$
$\sinh x - 1$	$---$	$---$	$+++$
$-1 - \sinh x$	$+++$	$---$	$---$
$f'(x)$	$---$	$+++$	$---$
$f(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$

Grafico



Dunque $x = \log(-1+\sqrt{2})$ è il punto di minimo assoluto.

Non ci sono altri punti di estremo locale.

Monotonia:

f decresce su $(-\infty, \log(-1+\sqrt{2})]$

f cresce su $[\log(-1+\sqrt{2}), \log(1+\sqrt{2}))$

f decresce su $(\log(1+\sqrt{2}), +\infty)$