Soluzione del Tema 3 del compito del 20/02/2013

Esercizio 1 Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = x \left| 6 + \frac{1}{\log(4x)} \right|$$

Dominio Deve essere $4x > 0$ per l'esistenza del logaritmo, Deve essere

$$\log(4x) \neq 0 \iff 4x \neq 1 \iff x \neq 1/4$$

per l'esistenza del quoziente. Dunque

$$D(f) = (0, 1/4) \cup (1/4, \infty).$$

Segno Si ha $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in D(f)$. Inoltre:

$$f(x) = 0 \underset{(x>0)}{\iff} 6 + \frac{1}{\log(4x)} = 0$$

$$\iff \log 4x = -\frac{1}{6} \iff x = \frac{1}{4} e^{-1/6} \in (0, 1/4).$$

Limiti agli estremi

$$\lim_{x \to 0^+} x \left| 6 + \frac{1}{\log(4x)} \right| = 0$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{4}} x \left| 6 + \frac{1}{\log(4x)} \right| = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} x \left| 6 + \frac{1}{\log(4x)} \right| = +\infty$$

__Asintoti__

$x = \frac{1}{4}$ Asintoto verticale destro e sinistro

Cerchiamo asintoto obliquo a $+\infty$ della forma $y = mx + q$.
Si ha

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 6$$

$$q = \lim_{x \to \infty} f(x) - 6x = \lim_{x \to \infty} 6x \left| 1 + \frac{1}{6 \log 4x} \right| - 6x$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\log 4x} = \infty$$ (Noto)
(Oppure: Hôpital)

Dunque q non esiste __finito__. Non c'è asintoto obliquo.

__Continuità e prolungamenti__ f è continua nel dominio (prodotto e composizione di funzioni continue).
Ponendo $f(0) = 0$, f si prolunga con continuità nel punto $x = 0$.

__Derivabilità__ Il valore assoluto $|x|$ non è derivabile per $x = 0$.
Quindi f non è derivabile quando $6 + \frac{1}{\log 4x} = 0 \iff$
$\iff x = \frac{1}{4} e^{-1/6}$.
Su $(0, \frac{1}{4} e^{-1/6}) \cup (\frac{1}{4} e^{-1/6}, \infty)$ f è derivavile in quanto composizione di funzioni derivabili.

Derivata Per $x \neq 0$ e $x \neq \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{6}}$

$$f'(x) = \left| 6 + \frac{1}{\log 4x} \right| + x \cdot \frac{\left| 6 + \frac{1}{\log 4x} \right|}{6 + \frac{1}{\log 4x}} \cdot \frac{-\frac{1}{x}}{(\log 4x)^2}$$

$$= \left| 6 + \frac{1}{\log 4x} \right| \left[1 - \frac{1}{\log 4x \, (6 \log 4x + 1)} \right]$$

Nel punto $x = 0$, la derivata destra è

$$f'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - \overset{=0}{f(0)}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \left| 6 + \frac{1}{\log 4x} \right| = 6$$

Ricopio la derivata

$$f'(x) = \left| 6 + \frac{1}{\log 4x} \right| - \frac{\left| 6 + \frac{1}{\log 4x} \right|}{6 + \frac{1}{\log 4x}} \cdot \frac{1}{(\log 4x)^2}$$

Limiti della derivata Osserviamo che se $\log 4x < 0$

$$6 + \frac{1}{\log 4x} > 0 \iff x < \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{6}} = x_0$$

Dunque

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = +36$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = -36$$

Segno di $f'(x)$

$$f'(x) > 0 \iff \frac{\log 4x \, (6\log 4x + 1) - 1}{\log 4x \, (6\log 4x + 1)} > 0$$

Poniamo $t = \log 4x$ e studiamo

$$Q(t) = \frac{6t^2 + t - 1}{t\,(6t+1)} > 0$$

Soluzioni di $6t^2 + t - 1 = 0$; $t_\pm = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12}$

$$t_\pm = \begin{cases} 1/3 \\ -1/2 \end{cases}$$

Dunque $6t^2 + t - 1 > 0 \iff t < -1/2$ oppure $t > \frac{1}{3}$

Inoltre $t(6t+1) > 0 \iff t < -\frac{1}{6}$ oppure $t > 0$

		$-1/2$		$-1/6$		0		$1/3$	
$6t^2+t-1$	$+++$		$---$		$---$	X	$---$		$+++$
$t(6t+1)$	$+++$		$+++$		$---$		$+++$		$+++$
$Q(t)$	$+++$		$---$		$+++$		$---$		$+++$
		$\frac{1}{4}e^{-1/2}$		$\frac{1}{4}e^{-1/6}$		$1/4$		$\frac{1}{4}e^{1/3}$	
$f'(x)$	$+++$		$---$	•	$+++$	X	$---$		$+++$
$f(x)$	$\uparrow$		$\downarrow$	0	$\uparrow$		$\downarrow$		$\uparrow$

Monotonia

f è crescente su $\left(0, \frac{1}{4} e^{-1/2}\right)$

f è crescente su $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

f è crescente su $\left(\frac{1}{4} e^{1/3}, \infty\right)$

In ciascun altro intervallo f è decrescente.

Estremi:

$x = 0$ p.to minimo assoluto (dopo prolungamento)

$x = \frac{1}{4} e^{-1/6}$ p.to minimo assoluto

$x = \frac{1}{4} e^{1/3}$ p.to minimo locale

$x = \frac{1}{4} e^{-1/2}$ p.to massimo locale

Grafico