ESERCIZIO Calcolare l'integrale

$$I = \int_{\log 5}^{\infty} \frac{\sqrt{e^x+4}}{e^x+5}\, dx .$$

Soluzione. Per $M > \log 5$ sia

$$I_M = \int_{\log 5}^{M} \frac{\sqrt{e^x+4}}{e^x+5}\, dx .$$

Con il cambio di variabile $y = \sqrt{e^x+4} \iff y^2 = e^x+4$ $\iff e^x = y^2-4 \iff x = \log(y^2-4)$, da cui

$$dx = \frac{2y}{y^2-4}\, dy$$

e inoltre

$$x = \log 5 \implies y = 3$$

$$x = M \implies y = \sqrt{e^M+4} = y_M$$

si trova

$$I_M = \int_3^{y_M} \frac{y \cdot 2y\, dy}{(y^2+1)(y^2-4)}$$

$$= 2\int_3^{y_M} \frac{y^2-4+4}{(y^2+1)(y^2-4)}\, dy$$

$$= 2\int_3^{y_M} \left(\frac{1}{y^2+1} + \frac{4}{(y^2+1)(y^2-4)} \right) dy$$

Cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{A}{y^2+1} + \frac{B}{y^2-4} = \frac{1}{(y^2+1)(y^2-4)}$$

$$\frac{Ay^2 - 4A + By^2 + B}{(y^2+1)(y^2-4)} = \frac{1}{(y^2+1)(y^2-4)}$$

Trovo il sistema

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ -4A + B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -B \\ 5B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{5} \\ B = +\frac{1}{5} \end{cases}.$$

Quindi:

$$I_M = 2 \int_3^{y_M} \left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{4}{5} \frac{1}{y^2+1} + \frac{4}{5} \frac{1}{y^2-4} \right) dy$$

$$= \frac{2}{5} \int_3^{y_M} \frac{1}{y^2+1}\, dy + \frac{8}{5} \int_3^{y_M} \left(\frac{\frac{1}{4}}{y-2} - \frac{\frac{1}{4}}{y+2} \right) dy$$

$$= \frac{2}{5} \Big[\operatorname{arctg}(y) \Big]_{y=3}^{y=y_M} + \frac{2}{5} \left[\log \left| \frac{y-2}{y+2} \right| \right]_{y=3}^{y=y_M}$$

$$= \frac{2}{5} \left(\operatorname{arctg}(y_M) - \operatorname{arctg}(3) \right) +$$

$$+ \frac{2}{5} \left(\log \left| \frac{y_M - 2}{y_M + 2} \right| - \log \frac{1}{5} \right)$$

In conclusione:

$$I = \lim_{M \to \infty} I_M = \frac{2}{5}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(3)\right) + \frac{2}{5}\log 5,$$

Infatti $y_M \xrightarrow[M \to \infty]{} \infty$ e $\lim_{M \to \infty} \log\left|\frac{y_M - 2}{y_M + 2}\right| = \log 1 = 0.$