

Esercizio 1. Calcolare i seguenti integrali impropri

$$1) \int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2} dx; \quad 2) \int_0^{\infty} x^{-2} e^{-\frac{1}{x}} dx; \quad 3) \int_0^{\infty} e^{-\beta x} \sin(\alpha x) dx, \quad \beta > 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Risposte: 1) 0. L'integrale su $(0, 1)$ è l'opposto di quello su $(1, \infty)$. 2) 1. 3) $\frac{\alpha}{\beta^2 + \alpha^2}$. Una primitiva si trova integrando per parti due volte.

Esercizio 2. i) Determinare tutti i parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che il seguente integrale improprio converga

$$\int_0^{\infty} \frac{1+x^\beta}{x^\alpha(1+x^2)} dx.$$

ii) Rappresentare i parametri ammissibili nel piano cartesiano $\alpha\beta$.

Risposte: i) Spezzare l'integrale su $(0, 1)$ e $(1, \infty)$. Discutere separatamente quattro integrali elementari. ii) Parallelogramma centrato nell'origine.

Esercizio 3. Stabilire se convergono i seguenti integrali impropri (non si chiede di calcolarli)

$$1) \int_0^{\infty} \sin^2 x dx; \quad 2) \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\sin(x)}} dx; \quad 3) \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Risposte: 1) diverge a ∞ ; 2) diverge a ∞ ; 3) converge.

Esercizio 4. Calcolare gli $\alpha > 0$ tali che converga ciascuno dei seguenti integrali impropri

$$1) \int_0^1 \frac{(1-\cos x)^\alpha}{\tan x - x} dx; \quad 2) \int_0^1 \frac{\sin(x^\alpha)}{\log(1+x)} dx;$$
$$3) \int_0^{\infty} \frac{\pi/2 - \arctan(\sqrt{x})}{x^\alpha} dx; \quad 4) \int_2^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\log^\alpha x} dx.$$

Risposte: 1) $\alpha > 1$; 2) $\alpha > 0$; 3) $1/2 < \alpha < 1$. Al fine di studiare la convergenza a ∞ con il Criterio del confronto asintotico, determinare preliminarmente $\beta \in \mathbb{R}$ tale che il limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\beta (\pi/2 - \arctan(\sqrt{x})) = L \neq 0$$

esista finito e diverso da 0. 4) $\alpha > 1$ (Confronto asintotico con $\frac{1}{x \log^\alpha x}$).

Definizione. Si dice che l'integrale improprio

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

converge assolutamente se converge l'integrale improprio

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Esercizio 5. Stabilire se convergono assolutamente i seguenti integrali impropri

$$1) \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx; \quad 2) \int_0^{\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}} \cos x dx; \quad 3) \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \tan \frac{1}{x} \right) \sin x dx.$$

Risposte: 1) Converge assolutamente (Confronto). 2) Converge assolutamente (Confronto). Usare la disuguaglianza $x^2 e^{-\sqrt{x}} \leq x^{-2}$ per $x \geq M$. 3) Converge assolutamente (Criterio del confronto asintotico). Ricordare lo sviluppo $\tan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$.