

**Esercizio 1.** Calcolare le soluzioni  $x \in \mathbb{R}$  della disequazione

$$\frac{\log(\sqrt{2x-1} + \sqrt{1-x})}{(1-x)(9x-5)} \geq 0.$$

Risposta: quale delle due? 1)  $1/2 < x < 5/9$  unito a  $5/9 < x < 1$ . 2)  $5/9 < x < 1$ .

**Esercizio 2.** Determinare  $\lambda \in \mathbb{C}$  tale che  $z_0 = -1$  sia radice del polinomio complesso

$$P(z) = z^3 + \lambda z^2 + (2-i)z + 2.$$

Per tale  $\lambda$ , calcolare le altre radici di  $P$ . Risposta:  $\lambda = 1 - i$ ,  $z_1 = 2i$ ,  $z_2 = -i$ .

**Esercizio 3.** Determinare  $\lambda \in \mathbb{C}$  tale che  $z_0 = i$  sia radice del polinomio complesso

$$P(z) = z^5 + \lambda z^4 + iz^2 + z.$$

Per tale  $\lambda$ , calcolare le altre radici di  $P$ . Risposta:  $\lambda = -i$ ,  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = i$  (quindi doppia),  $z_3 = -\sqrt{3}/2 - i/2$ ,  $z_4 = \sqrt{3}/2 - i/2$ .

**Esercizio 4.** Calcolare tutte le soluzioni  $z \in \mathbb{C}$  delle seguenti equazioni in campo complesso:

1)  $z^2 + 5 = |z - 3i|^2$ . Risposta:  $z_1 = i$ ,  $z_2 = 2i$ .

2)  $z^4 = |z|^2 + 2$ .

3)  $iz^2 - 2\bar{z} = 2 + i$ . Risposta:  $z_0 = -1$ ,  $z_1 = (1 + \sqrt{2}) - i\sqrt{2}$ ,  $z_2 = (1 - \sqrt{2}) + i\sqrt{2}$ .

4)  $(z+1)^4 = (2z-1)^4$ .

**Esercizio 5.** i) Calcolare le radici  $z \in \mathbb{C}$  dell'equazione  $z^4 + 1 = 0$ .

ii) Usare il punto i) per fattorizzare il polinomio  $x^4 + 1$ , con  $x \in \mathbb{R}$  variabile reale, nel prodotto di due polinomi (reali) di secondo grado.

**Esercizio 6.** Determinare tutti i numeri complessi  $z \in \mathbb{C}$  soluzioni della disequazione  $\operatorname{Re}(z + i\bar{z})\operatorname{Re}(z) \leq z\bar{z}$  e disegnarne l'insieme nel piano di Gauss.

**Esercizio 7.** Determinare tutti i numeri complessi  $z \in \mathbb{C}$  soluzioni della equazione

$$||z| - 4| = |z - 4i|$$

e disegnarne l'insieme nel piano di Gauss.

**Esercizio 8.** Nel piano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ , l'asse delle  $x$  è uno specchio riflettente mentre l'asse delle  $y$  è una barriera opaca in cui c'è una piccola fessura compresa fra le altezze  $y_0 = 0.92$  ed  $y_1 = 0.93$ . Nel punto di coordinate  $x = -4$  ed  $y = 1$  è collocato un puntatore laser. Stabilire se è possibile colpire con il raggio laser il punto di coordinate  $x = 100$  ed  $y = 1$ .