

Esercizio 1. Studiare la convergenza delle serie numeriche

$$\text{i) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + e^n}{(n+1)!}; \quad \text{ii) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n + 5^n}; \quad \text{iii) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$$

Risposte: i) converge (Criterio del rapporto); ii) converge (Criterio della radice oppure confronto con la serie geometrica di ragione $4/5$); iii) converge (Criterio del rapporto).

Esercizio 2. Studiare la convergenza delle seguenti serie

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2 + 1}; \quad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \log(n+1)}; \quad \text{iii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \log n}; \quad \text{iv) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \log n}.$$

Risposte: i) converge (Criterio del confronto, usare $\log n \leq \sqrt{n}$ per $n \geq \bar{n}$); ii) diverge (confronto); iii) converge (Leibniz).

Esercizio 3. Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} (\sqrt{1+n^4} - n^2)$$

converga. Risposta: $\alpha > -1$ (Criterio del confronto).

Esercizio 4. La rappresentazione decimale di un numero reale $x \in [0, 1]$ è un'espressione del tipo

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_{n+1} \dots$$

dove $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ è l' n -esima cifra decimale dopo la virgola, $n \geq 1$. Per definizione, il numero x è dato da

$$(*) \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

- i) Verificare che la serie in (*) converge;
- ii) Verificare che il numero x dato da (*) verifica $0 \leq x \leq 1$.

Esercizio 5. Calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$. Risposta: $3/4$. (Cfr. serie telescopiche).