Matematica A Foglio 8

Sviluppi infinitesimali - Funzioni continue 29 Novembre 2013

Esercizio 1. Al variare del parametro $\alpha > 0$, studiare la convergenza delle serie numeriche:

$$1)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\sin(1/n^{\alpha})\log\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\sqrt{n+1}\arctan(n)};\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt[3]{1+1/n^2}-\cos(1/n)\right).$$

Risposte: 1) Converge se e solo se $\alpha > 1/2$ (Confronto asintotico); 2) Converge se e solo se $\alpha < 1$.

Esercizio 2. Al variare del parametro $\alpha > 0$, studiare la convergenza della serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{3/2}\left(\sqrt{1-1/n^2}-\cos(1/n^{\alpha})\right).$$

Risposta: La serie converge se e solo se $\alpha = 1$. Si ricordi lo sviluppo $(1+x)^{\beta} = 1+\beta x+\frac{1}{2}\beta(\beta-1)x^2+o(x^2)$ per $x \to 0$, dove $\beta \in \mathbb{R}$ è un esponente assegnato.

Esercizio 3. Determinare gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel modo seguente sia continua

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x & \text{per } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \alpha+\beta\sin x & \text{per } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos x & \text{per } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Esercizio 4. Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel modo seguente sia continua

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha}\sin(1/x) & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ |x|^{-2\alpha}\arctan(x) & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Risposta: $0 < \alpha < 1/2$.

Esercizio 5. i) Dimostrare che l'equazione $1 - x^4 = \log(1 + x^2)$ ha esattamente due soluzioni $x \in \mathbb{R}$. ii) Sia $f(x) = x^7 + x^5 + \mathrm{e}^x$, $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che per ogni fissato $y \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = y$ ha una ed una sola soluzione $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(\alpha x)-x^2}{\sin^2(x)-\alpha x^2}.$$