# Analisi Matematica 1 — Foglio 9

Calcolo differenziale — 6 Dicembre 2013

---

**Esercizio 1.** Usando la definizione, calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

nei punti $x \neq -1$.

**Esercizio 2.** Usando la regola per la derivata della funzione composta, calcolare la derivata delle funzioni $f(x) = \arcsin(\log|\cos x|)$, $g(x) = x^x$ .
Risposta: $g'(x) = x^x \log x + x^x$.

**Esercizio 3.** Sia $f : [0, \infty) \to [0, \pi/2)$ la funzione $f(x) = \arctan(x2^x)$.
i) Verificare che $f$ è invertibile su $[0, \infty)$.
ii) Detta $f^{-1} : [0, \pi/2) \to [0, \infty)$ la funzione inversa, calcolare la derivata di $f^{-1}$ nel punto $y_0 = \arctan(2)$.
Risposta: $Df^{-1}(y_0) = \frac{5}{2+\log 4}$.

**Esercizio 4.** Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

i) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $f$ sia continua in $x = 0$;
ii) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $f$ sia derivabile in $x = 0$.
Risposte: i) $\alpha > 0$; ii) $\alpha > 1$.

**Esercizio 5.** Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = |x| \sin x + \cos x$.
i) Stabilire se $f$ è derivabile in tutti i punti dell'intervallo $(-\pi, \pi)$;
ii) Studiare i punti di max e min (relativo e assoluto) di $f$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. Non è richiesto calcolare esplicitamente i punti di max e min. [relativo=locale]

**Esercizio 6.** i) Calcolare i punti di minimo e di massimo e i valori massimo e minimo (relativo e assoluto) della funzione $f(x) = \arctan x - \log(1 + x^2)$ sull'intervallo $[0, 1]$.
ii) Calcolare i punti di minimo e di massimo e i valori massimo e minimo (relativo e assoluto) della funzione $g(x) = x^2 - 4|x| + 4$ sull'intervallo $[-3, 3]$.

**Esercizio 7.** Sia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x \log x$.
i) Disegnare un grafico approssimativo di $f$;
ii) Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di $f$ nel punto di coordinate $(1, 0)$;
iii) Verificare che per ogni $x > 0$ vale la disuguaglianza

$$\log x \geq 1 - \frac{1}{x}.$$

**Esercizio 8.** i) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la disequazione

$$\alpha x^2 - \log(1 + x^2) \geq 0$$

sia verificata per tutti gli $x \in \mathbb{R}$.
ii) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la disequazione

$$\frac{1}{2}x^2 - \log(1 + x^2) \geq \alpha$$

sia verificata per tutti gli $x \in \mathbb{R}$.
Risposte: i) $\alpha \geq 1$; ii) $\alpha \leq \frac{1}{2} - \log 2$.