Analisi Matematica 1 — Foglio 10

Teoremi di Hôpital, Lagrange e Taylor — 13 Dicembre 2013

Esercizio 1. Sia $p \geq 1$ un numero fissato. Determinare il più piccolo numero $q > 0$ (in funzione di p) tale che la disuguaglianza

$$x \leq \frac{1}{p} x^p + q$$

sia verificata per ogni $x \geq 0$.

Esercizio 2. Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, \end{cases}$$

è derivabile nel punto $x = 0$.

Esercizio 3. Calcolare i seguenti limiti

$$\text{i) } \lim_{x \to 1} \frac{1 - 2x + x^2}{x \sin^2(\pi x)}; \quad \text{ii) } \lim_{x \to 0} \frac{1 + \log(1+x) - x - \cos x - \frac{1}{3}x^3}{x^4}.$$

Esercizio 4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un numero reale fissato. Usando il Teorema di Hôpital, verificare che per $x \to 0$ si ha lo sviluppo

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} x^2 + o(x^2).$$

Dedurre questa formula dal Teorema di Taylor.

Esercizio 5. Usando lo sviluppo per $x \to 0$ del logaritmo

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

studiare la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \Big(\frac{1}{n} - \log \Big(1 + \frac{1}{n} \Big) \Big).$$

Esercizio 6. i) Usando il Teorema di Taylor, calcolare lo sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$, fino al terzo ordine e con resto di Peano della funzione $f(x) = \arctan(x)$.

ii) Usando il Teorema di Hôpital, verificare che la formula trovata per lo sviluppo è corretta.

iii) Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)\arctan(x) - x\sin(x)}{\arctan(x) - 1 - \log(1+x) + \cos(x)}.$$

Esercizio 7. Verificare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^n} = 0.$$

Suggerimento: Trasformare la frazione nella forma $x^{-n}/\mathrm{e}^{1/x}$.

Esercizio 8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $|f'(x)| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f(0) = 0$. Verificare che $|f(x)| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Suggerimento: Usare il Teorema di Lagrange.