Analisi Matematica 1

Anno Accademico 2013-2014

Roberto Monti

Versione del 11 Ottobre 2013

Contents

CHAPTER 1

Numeri naturali e reali

1. Numeri naturali e principio di induzione

Dal modo stesso in cui i numeri naturali vengono costruiti o definiti, discende la validità del *Principio d'induzione.*

Principio d'induzione. Sia $A(n)$ un'affermazione che riguarda il numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:

i) $A(0)$ (oppure $A(1)$ se $\mathbb{N}$ inizia da 1) è vera (*base induttiva*);
ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (*passo induttivo*).

Allora $A(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

1.1. Formula per la somma geometrica. Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \tag{1.1}$$

La formula vale anche se $x \in \mathbb{C}$ è un numero complesso $x \neq 1$. La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 + x)(1 - x)}{1 - x} = 1 + x.$$

Supponiamo vera la formula (1.1) per $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+1} &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \end{aligned}$$

1.2. Disuguaglianza di Bernoulli. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $x > -1$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \tag{1.2}$$

La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha un'identità. Supponiamo vera le (1.2) per un certo $n \in \mathbb{N}$ e proviamola per $n + 1$:

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

1.3. Formula del Binomio di Newton. Il *fattoriale* $n!$ si definisce per induzione nel seguente modo:

i) $0! = 1$ e $1! = 1$;
ii) $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Dati $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$, si definiscono i *coefficienti binomiali*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Verifichiamo per induzione la formula per il Binomio di Newton:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Quando $n = 1$ la verifica è elementare:

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = x + y.$$

Supponiamo vera la formula per n e proviamola per $n+1$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k \\
&= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1}.
\end{aligned}$$

Ora utilizziamo la formula di Stiefel, la cui verifica è un facile esercizio. Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$ vale l'identità

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Si trova allora

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k.
\end{aligned}$$

2. Numeri reali

2.1. Relazioni d'ordine. Premettiamo la definizione di ordine totale.

Definizione 2.1 (Ordine totale). Una relazione $\leq$ su un insieme X è una relazione di *ordine totale* se per ogni $x, y, z \in X$ si ha:

i) $x \leq x$ (proprietà riflessiva);
ii) $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (confrontabilità);
iii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica);
iv) Se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$ (proprietà transitiva).

2.2. Introduzione assiomatica dei numeri reali. Introduciamo in modo assiomatico i numeri reali come *campo ordinato completo.*

Definizione 2.2. I numeri reali sono un insieme $\mathbb{R}$ munito di due operazioni $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e di una relazione di ordine totale $\leq$ che verificano, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$, la seguente lista di assiomi.

Assiomi della somma:

(S1) $x + y = y + x$ (proprietà commutativa);
(S2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (proprietà associativa);
(S3) esiste $0 \in \mathbb{R}$ tale che $x + 0 = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);
(S4) per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $-x \in \mathbb{R}$ tale che $x + (-x) = 0$ (esiste l'opposto).

Assiomi del prodotto (o moltiplicazione):

(P1) $x \cdot y = y \cdot x$ (proprietà commutativa);
(P2) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (proprietà associativa);
(P3) esiste $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tale che $1 \cdot x = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);
(P4) per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, esiste $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tale che $x \cdot x^{-1} = 1$ (esiste il reciproco).

Proprietà distributiva:

(D) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Assiomi dell'ordine:

(O1) se $x \leq y$ allora $x + z \leq y + z$;
(O2) se $x \leq y$ e $z \geq 0$, allora $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Assioma di completezza:

(AC) Ogni insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ha estremo superiore.

Chiariremo l'assioma di completezza fra breve. Gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sono in modo naturale sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. I numeri razionali $\mathbb{Q}$ con le usuali operazioni e relazione d'ordine formano un campo ordinato che verifica tutti gli assiomi precedenti, ad eccezione dell'Assioma di completezza.

Definizione 2.3 (Maggiorante, estremo superiore, massimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante* di A se $x \leq y$ per ogni $x \in A$.
ii) L'insieme A si dice *superiormente limitato* se ha un maggiorante.

iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo superiore* di A se è un maggiorante di A e se $x \le z$ per ogni altro maggiorante z di A (ovvero x è il minimo dei maggioranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di A porremo

$$\sup A = x.$$

iv) Se A non è superioremente limitato porremo

$$\sup A = \infty.$$

La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\sup \emptyset = -\infty$.

v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *massimo* di A se $x = \sup A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso

$$\max A = x.$$

L'estremo superiore e il massimo, se esistono, sono unici. La definizione di estremo superiore può essere riformulata nei seguenti termini. Un numero $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se e solo se:

i) $y \le x$ per ogni $y \in A$;
ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y \in A$ tale che $y > x - \varepsilon$.

Definizione 2.4 (Minorante, estremo inferiore, minimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *minorante* di A se $y \le x$ per ogni $x \in A$.
ii) L'insieme A si dice *inferiormente limitato* se ha un minorante.
iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo inferiore* di A se è un minorante di A e se $z \le x$ per ogni altro minorante z di A (ovvero x è il massimo dei minoranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di A porremo

$$\inf A = x.$$

iv) Se A non è inferiormente limitato porremo

$$\inf A = -\infty.$$

La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\inf \emptyset = \infty$.

v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *minimo* di A se $x = \inf A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso

$$\min A = x.$$

Un numero $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se e solo se:

i) $y \ge x$ per ogni $y \in A$;
ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y \in A$ tale che $y < x + \varepsilon$.

2.3. Conseguenze della completezza.

Proposizione 2.5 (Proprietà di Archimede). Per ogni coppia di numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$, esiste un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$.

Dim. Supponiamo per assurdo che esistano numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$ tali che $nx \le y$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora l'insieme

$$A = \big\{ nx \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \big\}$$

è superioremente limitato, in quanto y ne è un maggiorante. Per l'Assioma di completezza esiste l'estremo superiore $\bar{x} = \sup A$. Il numero $\bar{x} \in \mathbb{R}$ è caratterizzato dalle seguenti due proprietà:

1) $nx \leq \bar{x}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero $\bar{x}$ è un maggiorante di A;
2) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > \bar{x} - \varepsilon$, ovvero $\bar{x}$ è il minimo dei maggioranti.

Scegliamo $\varepsilon = x > 0$ nella proprietà 2) e sia $n \in \mathbb{N}$ il corripondente numero naturale, ovvero $nx > \bar{x} - x$. Allora da 1) e 2) si ottiene:

$$\bar{x} \geq (n+1)x = nx + x > \bar{x} - x + x = \bar{x},$$

che è una contraddizione. □

Definizione 2.6 (Parte intera e frazionaria). Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale e si consideri l'insieme

$$A_x = \big\{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\big\}.$$

A_x è un insieme di numeri interi superiormente limitato che ha dunque estremo superiore. Poichè A_x è un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ questo estremo superiore è un massimo. Definiamo la *parte intera di x*

$$[x] = \max\big\{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\big\} \in \mathbb{Z}.$$

Il numero $[x] \in \mathbb{Z}$ è il più grande intero minore o uguale ad x. La *parte frazionaria di x* è il numero $\{x\} = x - [x]$.

Parte intera e parte frazionaria verificano le seguenti disuguaglianze:

$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad 0 \leq \{x\} < 1.$$

Proviamo ora che i numeri razionali $\mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$.

Proposizione 2.7 (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$.

Dim. [1] Siccome $y - x > 0$, per la proprietà di Archimede esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n(y - x) > 1$, ovvero $ny - nx > 1$. Segue che

$$nx < ny - 1 < [ny] \leq ny.$$

Il numero $\bar{q} = [ny]/n \in \mathbb{Q}$ verifica dunque $x < \bar{q} \leq y$. Per avere una disuguaglianza stretta anche a destra argomentiamo nel seguente modo. Esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $m(\bar{q} - x) > 1$ e quindi

$$x < \bar{q} - \frac{1}{m} < \bar{q} \leq y.$$

Il numero $q = \bar{q} - \frac{1}{m} \in \mathbb{Q}$ verifica quindi la tesi.

□

[1]Dimostrazione omessa.

3. $\mathbb{R}$ come spazio metrico

La funzione *modulo* o *valore assoluto* su $\mathbb{R}$ è la funzione $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, nel seguente modo

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0; \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Valgono le disuguaglianze elementari $x \leq |x|$ e $-x \leq |x|$, ed inoltre:

i) $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
ii) $|x| = |-x|$;
iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ (subadittività).

La verifica di iii) segue dalle disuguaglianze

$$x + y \leq |x| + |y| \quad \text{e} \quad -(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|.$$

Una conseguenza di iii) è la *disuguaglianza triangolare*

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| \quad \text{per ogni } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Infatti, $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$. Dalla iii) segue anche $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ che riordinata fornisce $|x| - |y| \leq |x - y|$. Siccome i ruoli di x, y si possono scambiare, si ottiene la disuguaglianza

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|.$$

Definiamo la *funzione distanza* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $d(x, y) = |x - y|$. Questa funzione verifica le seguenti proprietà:

i) $d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
ii) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;
iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ (disuguaglianza triangolare).

La coppia $(\mathbb{R}, d)$ è allora uno *spazio metrico.* La funzione $d(x, y) = |x - y|$ si dice distanza standard o Euclidea su $\mathbb{R}$.

4. Esercizi

Esercizio 4.1. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \Big\{\frac{xy}{x + y} \in \mathbb{R} : 0 < x, y < 1\Big\}.$$

1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

Esercizio 4.2. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \big\{n - \sqrt{n^2 - 1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\, n \geq 1\big\}.$$

1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

Esercizio 4.3. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \Big\{\frac{n \log(1/n)}{n + 1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\, n \geq 1\Big\}.$$

Provare che $\inf A = -\infty$.

CHAPTER 2

Numeri complessi

1. Introduzione

Introduciamo il simbolo $i = \sqrt{-1}$ che ubbidisce alla regola $i^2 = -1$. Il numero i si chiama *unità immaginaria*. I numeri complessi sono l'insieme

$$\mathbb{C} = \big\{ z = x + iy \, : \, x, y \in \mathbb{R} \big\},$$

ovvero l'insieme di tutte le "espressioni" della forma $x + iy$ dove x e y sono numeri reali. Il numero complesso $z = x + iy$ può essere identificato con il punto del piano Cartesiano $\mathbb{R}^2$ di coordinate (x, y):

Disegno

Definiamo la *parte reale* e la *parte immaginaria* del numero complesso $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(x+iy) \quad \text{Parte reale di } z \\ y &= \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(x+iy) \quad \text{Parte immaginaria di } z. \end{aligned}$$

Le parti reale e immaginaria di un numero complesso sono numeri reali.

2. Operazioni sui numeri complessi

Introduciamo le operazioni di somma, prodotto e reciproco di numeri complessi.

2.1. Somma. Dati due numeri complessi $z = x + iy$ e $w = \xi + i\eta$ in $\mathbb{C}$, definiamo la loro somma:

$$z + w = (x + iy) + (\xi + i\eta) = (x + \xi) + i(y + \eta).$$

Nel piano complesso, la somma è semplicemente la somma vettoriale:

Disegno

2.2. Prodotto. Dati due numeri complessi $z = x + iy$ e $w = \xi + i\eta$ in $\mathbb{C}$, definiamo il loro prodotto:

$$z \cdot w = (x + iy) \cdot (\xi + i\eta) = x\xi + ix\eta + iy\xi + i^2 y\eta = (x\xi - y\eta) + i(x\eta + y\xi).$$

Abbiamo usato la regola $i^2 = -1$. Vedremo in seguito l'interpretazione geometrica del prodotto di numeri complessi. Il simbolo $\cdot$ per indicare il prodotto viene spesso omesso.

2.3. Reciproco e quoziente. Calcoliamo formalmente il reciproco di un numero complesso $z \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2-i^2y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Usiamo questo calcolo formale per *definire* il reciproco di $z = x+iy \neq 0$ nel seguente modo

$$\frac{1}{z} := \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Con un calcolo che ripercorre a ritroso il precedente si verifica ora che per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$ si ha

$$z \cdot \frac{1}{z} = 1.$$

Definito il reciproco di un numero complesso, è immediato definire anche il quoziente fra due numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$ con $w \neq 0$:

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}.$$

2.4. Campo dei numeri complessi. L'operazione di somma verifica gli assiomi (S1)-(S4). L'operazione di prodotto verifica gli assiomi (P1)-(P4). Inoltre somma e prodotto sono legati dalla proprietà distributiva:

$$z \cdot (w+\zeta) = z \cdot w + z \cdot \zeta, \quad z, w, \zeta \in \mathbb{C}.$$

Questi fatti si riassumono dicendo che $\mathbb{C}$ è un *campo*.

Osservazione importante. Nel campo complesso $\mathbb{C}$ non c'è alcuna relazione d'ordine $\leq$. Dunque, scrivere

$$z \leq w \quad \text{con } z, w \in \mathbb{C} \quad \text{NON} \quad \text{ha senso.}$$

3. Coniugato, modulo e argomento

3.1. Coniugato. Definiamo il *coniugato* del numero complesso $z = x+iy$ come il numero complesso

$$\bar{z} = x - iy.$$

Chiaramente, nel piano complesso $\bar{z}$ è il punto simmetrico a z rispetto all'asse delle x:

Disegno

L'operazione di coniugazione verifica le proprietà descritte nel seguente teorema, la cui dimostrazione è elementare e viene omessa.

Proposizione 3.1. Dati numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$, si ha:

1) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$;
2) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$;
3) $\bar{\bar{z}} = z$;
4) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

La dimostrazione è elementare e viene omessa. Sono anche utili le seguenti formule per le parti reale e immaginaria di $z = x + iy$:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

3.2. Modulo. Il modulo del numero complesso $z = x + iy$ è

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Il modulo è sempre un numero reale non negativo. Se $z = x \in \mathbb{R}$ è un numero reale, allora si ha $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ e si trova il valore assoluto di x. Dunque il modulo è l'estensione del valore assoluto.

Per il Teorema di Pitagora, il modulo $|z|$ è la lunghezza del vettore z:

Disegno

3.3. Argomento. Sia $\vartheta \in [0, 2\pi)$ l'angolo formato in senso antiorario dal punto $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, a partire dal semiasse positivo delle x. Definiamo l'*argomento* di z

$$\arg(z) = \vartheta.$$

Dalla trigonometria sappiamo che si hanno le relazioni

$$x = |z| \cos\vartheta \quad \text{e} \quad y = |z| \sin\vartheta.$$

Supponendo $x \neq 0$ e formando il quoziente si trova

$$\mathrm{tg}\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \frac{y}{x}.$$

Quando $x = 0$ allora l'argomento sarà $\pi/2$ quando $y > 0$ e $3\pi/2$ quando $y < 0$. Quando $\vartheta \in [0, \pi/2)$, ovvero quando z è nel primo quadrante, possiamo invertire la relazione precedente e trovare la formula per l'argomento

$$\arg(z) = \vartheta = \mathrm{arctg}\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Esercizio 3.1. Dato $z = x + iy \in \mathbb{C}$, provare che:
1) $\arg(z) = \pi + \mathrm{arctg}\big(y/x\big)$ quando z è nel secondo e terzo quadrante.
2) $\arg(z) = 2\pi + \mathrm{arctg}\big(y/x\big)$ quando z è nel quarto quadrante.

4. Rappresentazione trigonometrica ed esponenziale

4.1. Rappresentazione trigonometrica. Sia $r = |z| \geq 0$ il modulo di $z \in \mathbb{C}$, e sia $\vartheta = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ il suo argomento. Allora avremo

$$\begin{aligned} z = x + iy &= r\cos\vartheta + ir\sin\vartheta \\ &= r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta). \end{aligned}$$

Questa è la *rappresentazione trigonometrica* di z.

Usiamo la rappresentazione trigonometrica per interpretare geometricamente il prodotto di numeri complessi. Siano $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ e $w = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ con $r, \varrho \geq 0$ e $\vartheta, \varphi \in [0, 2\pi)$. Allora si ha:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r\varrho\big[\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi + i(\cos\vartheta\sin\varphi + \sin\vartheta\cos\varphi)\big] \\ &= r\varrho\big(\cos(\vartheta + \varphi) + i\sin(\vartheta + \varphi)\big). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Abbiamo usato le formule di addizione per seno e coseno.

Le conclusioni sono interessanti:

1) Il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli: $|zw| = |z||w|$;

2) l'argomento del prodotto è la somma degli argomenti: $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$.

Disegno

4.2. Rappresentazione esponenziale. Passiamo alla rappresentazione esponenziale di un numero complesso. Poniamo

$$\mathrm{e}^{i\vartheta} := \cos\vartheta + i\sin\vartheta. \tag{4.4}$$

Questa formula si chiama *identità di Eulero*. Per il momento la accettiamo come definizione. Alla fine del corso ne daremo anche una dimostrazione basata sugli sviluppi di Taylor.

Proposizione 4.1. L'esponenziale complesso ha le seguenti proprietà:

1) $|\mathrm{e}^{i\vartheta}| = 1$ per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$;
2) $\mathrm{e}^{i\vartheta} \cdot \mathrm{e}^{i\varphi} = \mathrm{e}^{i(\vartheta+\varphi)}$ (formula di addizione).
3) $(\mathrm{e}^{i\vartheta})^n = \mathrm{e}^{in\vartheta}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (formula di de Moivre).

Dim. La 1) segue dalla definizione (4.4). La 2) è una riformulazione di (4.3). La formula 3) segue iterando la 2). □

Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ si può scrivere nel seguente modo

$$z = r\mathrm{e}^{i\vartheta},$$

dove $r = |z| \geq 0$ è il modulo di z e $\vartheta = \arg(z)$ è il suo argomento. Questa è la *rappresentazione esponenziale* di un numero complesso.

5. Radici di un numero complesso

Sia $w = R\mathrm{e}^{i\varphi}$, con $R = |w| \geq 0$ e $\varphi = \arg(w) \in [0, 2\pi)$, un numero complesso fissato e sia $n \in \mathbb{N}$. Vogliamo risolvere l'equazione

$$z^n = w$$

nell'incognita $z \in \mathbb{C}$. In altri termini, vogliamo trovare (tutte) le radici n-esime del numero complesso $w \in \mathbb{C}$. Per il Teorema Fondamentale dell'Algebra, che vedremo fra breve, ci sono esattamente n soluzioni.

Cerchiamo soluzioni in forma esponenziale $z = r\mathrm{e}^{i\vartheta}$ con $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$ da determinare. Usando la formula di de Moivre, avremo

$$z^n = (r\mathrm{e}^{i\vartheta})^n = r^n(\mathrm{e}^{i\vartheta})^n = r^n\mathrm{e}^{in\vartheta}.$$

L'equazione $z^n = w$ diventa allora

$$r^n\mathrm{e}^{in\vartheta} = R\mathrm{e}^{i\varphi}.$$

Uguagliando i moduli si ottiene l'equazione

$$r^n = R \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt[n]{R}.$$

D'altra parte, si ha

$$\mathrm{e}^{in\vartheta} = \mathrm{e}^{i\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad n\vartheta = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

e quindi si trovano gli argomenti

$$\vartheta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Basta considerare gli indici $k = 0, 1, \ldots, n-1$, perchè gli altri k danno delle ripetizioni. In conclusione, si ottengono n radici distinte

$$z_k = \sqrt[n]{R}\,\mathrm{e}^{i\vartheta_k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Le radici si dispongono sui vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza centrata in 0 di raggio $\sqrt[n]{R}$.

Esempio 5.1. Vogliamo calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^4 = -1$. In primo luogo si scrive il numero complesso $w = -1$ in forma esponenziale: $R = |w| = 1$ mentre $\varphi = \arg(w) = \pi$. Dunque si ha $-1 = \mathrm{e}^{i\pi}$. Si trovano le quattro radici

$$z_k = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi\right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Le soluzioni si dispongono sui vertici di un quadrato:

Disegno

6. Numeri complessi come spazio metrico

Definiamo la distanza fra due numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$ nel seguente modo:

$$d(z, w) = |z - w|.$$

Si tratta della lunghezza del segmento che congiunge z e w:

Disegno

Osserviamo che, con $z = x + iy$ e $w = \xi + i\eta$, si ha

$$\begin{aligned} |z - w| &= |x + iy - (\xi + i\eta)| = |x + iy - \xi - i\eta| \\ &= |(x - \xi) + i(y - \eta)| \\ &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \end{aligned}$$

La distanza d verifica le seguenti proprietà:

(1) $d(z, w) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |z - w| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z - w = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = w$.
(2) $d(z, w) = |z - w| = |w - z| = d(w, z)$.
(3) $d(z, w) \leq d(z, \zeta) + d(\zeta, w)$ (Disuguaglianza triangolare).

La verifica della disuguaglianza triangolare è omessa.

Esempio 6.1. Fissati un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ ed un numero reale $r \geq 0$, l'insieme

$$A = \big\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\big\}$$

è la circonferenza di raggio r e centro z_0.

Esempio 6.2. Fissati un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ ed un numero reale $r \geq 0$, l'insieme

$$B = \big\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\big\}$$

è tutto il cerchio (bordo incluso).

Disegno

Esempio 6.3. L'insieme

$$E = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| + |z + i| = 4\}$$

è un'ellisse di fuochi i e $-i$.