Analisi Matematica 1

Anno Accademico 2013-2014

Roberto Monti

Versione del 20 Dicembre 2013

Contents

CHAPTER 1

Numeri naturali e reali

1. Numeri naturali e principio di induzione

Dal modo stesso in cui i numeri naturali vengono costruiti o definiti, discende la validità del *Principio d'induzione.*

Principio d'induzione. Sia $A(n)$ un'affermazione che riguarda il numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:

i) $A(0)$ (oppure $A(1)$ se $\mathbb{N}$ inizia da 1) è vera (*base induttiva*);
ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (*passo induttivo*).

Allora $A(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

1.1. Formula per la somma geometrica. Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \tag{1.1}$$

La formula vale anche se $x \in \mathbb{C}$ è un numero complesso $x \neq 1$. La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 + x)(1 - x)}{1 - x} = 1 + x.$$

Supponiamo vera la formula (1.1) per $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+1} &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \end{aligned}$$

1.2. Disuguaglianza di Bernoulli. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $x > -1$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \tag{1.2}$$

La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha un'identità. Supponiamo vera le (1.2) per un certo $n \in \mathbb{N}$ e proviamola per $n + 1$:

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

1.3. Formula del Binomio di Newton. Il *fattoriale* $n!$ si definisce per induzione nel seguente modo:

i) $0! = 1$ e $1! = 1$;

ii) $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Dati $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$, si definiscono i *coefficienti binomiali*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Verifichiamo per induzione la formula per il Binomio di Newton:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Quando $n = 1$ la verifica è elementare:

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = x + y.$$

Supponiamo vera la formula per n e proviamola per $n+1$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k \\
&= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1}.
\end{aligned}$$

Ora utilizziamo la formula di Stiefel, la cui verifica è un facile esercizio. Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$ vale l'identità

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Si trova allora

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k.
\end{aligned}$$

2. Numeri reali

2.1. Relazioni d'ordine. Premettiamo la definizione di ordine totale.

DEFINIZIONE 2.1 (Ordine totale). Una relazione $\leq$ su un insieme X è una relazione di *ordine totale* se per ogni $x, y, z \in X$ si ha:

i) $x \leq x$ (proprietà riflessiva);
ii) $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (confrontabilità);
iii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica);
iv) Se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$ (proprietà transitiva).

2.2. Introduzione assiomatica dei numeri reali. Introduciamo in modo assiomatico i numeri reali come *campo ordinato completo.*

DEFINIZIONE 2.2. I numeri reali sono un insieme $\mathbb{R}$ munito di due operazioni $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e di una relazione di ordine totale $\leq$ che verificano, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$, la seguente lista di assiomi.

Assiomi della somma:

(S1) $x + y = y + x$ (proprietà commutativa);
(S2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (proprietà associativa);
(S3) esiste $0 \in \mathbb{R}$ tale che $x + 0 = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);
(S4) per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $-x \in \mathbb{R}$ tale che $x + (-x) = 0$ (esiste l'opposto).

Assiomi del prodotto (o moltiplicazione):

(P1) $x \cdot y = y \cdot x$ (proprietà commutativa);
(P2) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (proprietà associativa);
(P3) esiste $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tale che $1 \cdot x = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);
(P4) per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, esiste $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tale che $x \cdot x^{-1} = 1$ (esiste il reciproco).

Proprietà distributiva:

(D) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Assiomi dell'ordine:

(O1) se $x \leq y$ allora $x + z \leq y + z$;
(O2) se $x \leq y$ e $z \geq 0$, allora $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Assioma di completezza:

(AC) Ogni insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ha estremo superiore.

Chiariremo l'assioma di completezza fra breve. Gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sono in modo naturale sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. I numeri razionali $\mathbb{Q}$ con le usuali operazioni e relazione d'ordine formano un campo ordinato che verifica tutti gli assiomi precedenti, ad eccezione dell'Assioma di completezza.

DEFINIZIONE 2.3 (Maggiorante, estremo superiore, massimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante* di A se $x \leq y$ per ogni $x \in A$.
ii) L'insieme A si dice *superiormente limitato* se ha un maggiorante.

iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo superiore* di A se è un maggiorante di A e se $x \le z$ per ogni altro maggiorante z di A (ovvero x è il minimo dei maggioranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di A porremo

$$\sup A = x.$$

iv) Se A non è superioremente limitato porremo

$$\sup A = \infty.$$

La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\sup \emptyset = -\infty$.

v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *massimo* di A se $x = \sup A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso

$$\max A = x.$$

L'estremo superiore e il massimo, se esistono, sono unici. La definizione di estremo superiore può essere riformulata nei seguenti termini. Un numero $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se e solo se:

i) $y \le x$ per ogni $y \in A$;
ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y \in A$ tale che $y > x - \varepsilon$.

Definizione 2.4 (Minorante, estremo inferiore, minimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *minorante* di A se $y \le x$ per ogni $x \in A$.
ii) L'insieme A si dice *inferiormente limitato* se ha un minorante.
iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo inferiore* di A se è un minorante di A e se $z \le x$ per ogni altro minorante z di A (ovvero x è il massimo dei minoranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di A porremo

$$\inf A = x.$$

iv) Se A non è inferiormente limitato porremo

$$\inf A = -\infty.$$

La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\inf \emptyset = \infty$.

v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *minimo* di A se $x = \inf A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso

$$\min A = x.$$

Un numero $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se e solo se:

i) $y \ge x$ per ogni $y \in A$;
ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y \in A$ tale che $y < x + \varepsilon$.

2.3. Conseguenze della completezza.

Proposizione 2.5 (Proprietà di Archimede). Per ogni coppia di numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$, esiste un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$.

Dim. Supponiamo per assurdo che esistano numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$ tali che $nx \le y$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora l'insieme

$$A = \big\{nx \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\}$$

è superioremente limitato, in quanto y ne è un maggiorante. Per l'Assioma di completezza esiste l'estremo superiore $\bar{x} = \sup A$. Il numero $\bar{x} \in \mathbb{R}$ è caratterizzato dalle seguenti due proprietà:

1) $nx \leq \bar{x}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero $\bar{x}$ è un maggiorante di A;
2) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > \bar{x} - \varepsilon$, ovvero $\bar{x}$ è il minimo dei maggioranti.

Scegliamo $\varepsilon = x > 0$ nella proprietà 2) e sia $n \in \mathbb{N}$ il corripondente numero naturale, ovvero $nx > \bar{x} - x$. Allora da 1) e 2) si ottiene:

$$\bar{x} \geq (n+1)x = nx + x > \bar{x} - x + x = \bar{x},$$

che è una contraddizione. □

Definizione 2.6 (Parte intera e frazionaria). Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale e si consideri l'insieme

$$A_x = \big\{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\big\}.$$

A_x è un insieme di numeri interi superiormente limitato che ha dunque estremo superiore. Poichè A_x è un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ questo estremo superiore è un massimo. Definiamo la *parte intera di* x

$$[x] = \max\big\{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\big\} \in \mathbb{Z}.$$

Il numero $[x] \in \mathbb{Z}$ è il più grande intero minore o uguale ad x. La *parte frazionaria di* x è il numero $\{x\} = x - [x]$.

Parte intera e parte frazionaria verificano le seguenti disuguaglianze:

$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad 0 \leq \{x\} < 1.$$

Proviamo ora che i numeri razionali $\mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$.

Proposizione 2.7 (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$.

Dim. [1] Siccome $y - x > 0$, per la proprietà di Archimede esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n(y - x) > 1$, ovvero $ny - nx > 1$. Segue che

$$nx < ny - 1 < [ny] \leq ny.$$

Il numero $\bar{q} = [ny]/n \in \mathbb{Q}$ verifica dunque $x < \bar{q} \leq y$. Per avere una disuguaglianza stretta anche a destra argomentiamo nel seguente modo. Esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $m(\bar{q} - x) > 1$ e quindi

$$x < \bar{q} - \frac{1}{m} < \bar{q} \leq y.$$

Il numero $q = \bar{q} - \frac{1}{m} \in \mathbb{Q}$ verifica quindi la tesi.

□

[1] Dimostrazione omessa.

3. $\mathbb{R}$ come spazio metrico

La funzione *modulo* o *valore assoluto* su $\mathbb{R}$ è la funzione $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, nel seguente modo

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0; \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Valgono le disuguaglianze elementari $x \leq |x|$ e $-x \leq |x|$, ed inoltre:

i) $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
ii) $|x| = |-x|$;
iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ (subadittività).

La verifica di iii) segue dalle disuguaglianze

$$x + y \leq |x| + |y| \quad \text{e} \quad -(x+y) = -x - y \leq |x| + |y|.$$

Una conseguenza di iii) è la *disuguaglianza triangolare*

$$|x-y| \leq |x-z| + |z-y| \quad \text{per ogni } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Infatti, $|x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y|$. Dalla iii) segue anche $|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y|$ che riordinata fornisce $|x| - |y| \leq |x-y|$. Siccome i ruoli di x, y si possono scambiare, si ottiene la disuguaglianza

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|.$$

Definiamo la *funzione distanza* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $d(x,y) = |x-y|$. Questa funzione verifica le seguenti proprietà:

i) $d(x,y) \geq 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e $d(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$;
ii) $d(x,y) = d(y,x)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;
iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ (disuguaglianza triangolare).

La coppia $(\mathbb{R}, d)$ è allora uno *spazio metrico*. La funzione $d(x,y) = |x-y|$ si dice distanza standard o Euclidea su $\mathbb{R}$.

4. Esercizi

Esercizio 4.1. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \Big\{\frac{xy}{x+y} \in \mathbb{R} : 0 < x, y < 1\Big\}.$$

1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

Esercizio 4.2. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \big\{n - \sqrt{n^2 - 1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\, n \geq 1\big\}.$$

1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

Esercizio 4.3. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \Big\{\frac{n \log(1/n)}{n+1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\, n \geq 1\Big\}.$$

Provare che $\inf A = -\infty$.

CHAPTER 2

Numeri complessi

1. Introduzione

Introduciamo il simbolo $i = \sqrt{-1}$ che ubbidisce alla regola $i^2 = -1$. Il numero i si chiama *unità immaginaria*. I numeri complessi sono l'insieme

$$\mathbb{C} = \big\{z = x + iy \,:\, x, y \in \mathbb{R}\big\},$$

ovvero l'insieme di tutte le "espressioni" della forma $x + iy$ dove x e y sono numeri reali. Il numero complesso $z = x + iy$ può essere identificato con il punto del piano Cartesiano $\mathbb{R}^2$ di coordinate (x, y):

Disegno

Definiamo la *parte reale* e la *parte immaginaria* del numero complesso $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(x + iy) \quad \text{Parte reale di } z \\ y &= \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(x + iy) \quad \text{Parte immaginaria di } z. \end{aligned}$$

Le parti reale e immaginaria di un numero complesso sono numeri reali.

2. Operazioni sui numeri complessi

Introduciamo le operazioni di somma, prodotto e reciproco di numeri complessi.

2.1. Somma. Dati due numeri complessi $z = x + iy$ e $w = \xi + i\eta$ in $\mathbb{C}$, definiamo la loro somma:

$$z + w = (x + iy) + (\xi + i\eta) = (x + \xi) + i(y + \eta).$$

Nel piano complesso, la somma è semplicemente la somma vettoriale:

Disegno

2.2. Prodotto. Dati due numeri complessi $z = x+iy$ e $w = \xi+i\eta$ in $\mathbb{C}$, definiamo il loro prodotto:

$$z \cdot w = (x + iy) \cdot (\xi + i\eta) = x\xi + ix\eta + iy\xi + i^2 y\eta = (x\xi - y\eta) + i(x\eta + y\xi).$$

Abbiamo usato la regola $i^2 = -1$. Vedremo in seguito l'interpretazione geometrica del prodotto di numeri complessi. Il simbolo $\cdot$ per indicare il prodotto viene spesso omesso.

2.3. Reciproco e quoziente. Calcoliamo formalmente il reciproco di un numero complesso $z \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2 - i^2 y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Usiamo questo calcolo formale per *definire* il reciproco di $z = x + iy \neq 0$ nel seguente modo

$$\frac{1}{z} := \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Con un calcolo che ripercorre a ritroso il precedente si verifica ora che per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$ si ha

$$z \cdot \frac{1}{z} = 1.$$

Definito il reciproco di un numero complesso, è immediato definire anche il quoziente fra due numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$ con $w \neq 0$:

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}.$$

2.4. Campo dei numeri complessi. L'operazione di somma verifica gli assiomi (S1)-(S4). L'operazione di prodotto verifica gli assiomi (P1)-(P4). Inoltre somma e prodotto sono legati dalla proprietà distributiva:

$$z \cdot (w + \zeta) = z \cdot w + z \cdot \zeta, \quad z, w, \zeta \in \mathbb{C}.$$

Questi fatti si riassumono dicendo che $\mathbb{C}$ è un *campo*.

Osservazione importante. Nel campo complesso $\mathbb{C}$ non c'è alcuna relazione d'ordine $\leq$. Dunque, scrivere

$$z \leq w \quad \text{con } z, w \in \mathbb{C} \quad \text{NON} \quad \text{ha senso.}$$

3. Coniugato, modulo e argomento

3.1. Coniugato. Definiamo il *coniugato* del numero complesso $z = x + iy$ come il numero complesso

$$\bar{z} = x - iy.$$

Chiaramente, nel piano complesso $\bar{z}$ è il punto simmetrico a z rispetto all'asse delle x:

Disegno

L'operazione di coniugazione verifica le proprietà descritte nel seguente teorema, la cui dimostrazione è elementare e viene omessa.

Proposizione 3.1. Dati numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$, si ha:

1) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$;
2) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$;
3) $\bar{\bar{z}} = z$;
4) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

La dimostrazione è elementare e viene omessa. Sono anche utili le seguenti formule per le parti reale e immaginaria di $z = x + iy$:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

3.2. Modulo. Il modulo del numero complesso $z = x + iy$ è

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Il modulo è sempre un numero reale non negativo. Se $z = x \in \mathbb{R}$ è un numero reale, allora si ha $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ e si trova il valore assoluto di x. Dunque il modulo è l'estensione del valore assoluto.

Per il Teorema di Pitagora, il modulo $|z|$ è la lunghezza del vettore z:

Disegno

3.3. Argomento. Sia $\vartheta \in [0, 2\pi)$ l'angolo formato in senso antiorario dal punto $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, a partire dal semiasse positivo delle x. Definiamo l'*argomento* di z

$$\arg(z) = \vartheta.$$

Dalla trigonometria sappiamo che si hanno le relazioni

$$x = |z| \cos\vartheta \quad \text{e} \quad y = |z| \sin\vartheta.$$

Supponendo $x \neq 0$ e formando il quoziente si trova

$$\mathrm{tg}\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \frac{y}{x}.$$

Quando $x = 0$ allora l'argomento sarà $\pi/2$ quando $y > 0$ e $3\pi/2$ quando $y < 0$. Quando $\vartheta \in [0, \pi/2)$, ovvero quando z è nel primo quadrante, possiamo invertire la relazione precedente e trovare la formula per l'argomento

$$\arg(z) = \vartheta = \mathrm{arctg}\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Esercizio 3.1. Dato $z = x + iy \in \mathbb{C}$, provare che:
1) $\arg(z) = \pi + \mathrm{arctg}\big(y/x\big)$ quando z è nel secondo e terzo quadrante.
2) $\arg(z) = 2\pi + \mathrm{arctg}\big(y/x\big)$ quando z è nel quarto quadrante.

4. Rappresentazione trigonometrica ed esponenziale

4.1. Rappresentazione trigonometrica. Sia $r = |z| \geq 0$ il modulo di $z \in \mathbb{C}$, e sia $\vartheta = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ il suo argomento. Allora avremo

$$\begin{aligned} z = x + iy &= r\cos\vartheta + ir\sin\vartheta \\ &= r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta). \end{aligned}$$

Questa è la *rappresentazione trigonometrica* di z.

Usiamo la rappresentazione trigonometrica per interpretare geometricamente il prodotto di numeri complessi. Siano $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ e $w = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ con $r, \varrho \geq 0$ e $\vartheta, \varphi \in [0, 2\pi)$. Allora si ha:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r\varrho\big[\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi + i(\cos\vartheta\sin\varphi + \sin\vartheta\cos\varphi)\big] \\ &= r\varrho\big(\cos(\vartheta + \varphi) + i\sin(\vartheta + \varphi)\big). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Abbiamo usato le formule di addizione per seno e coseno.

Le conclusioni sono interessanti:

1) Il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli: $|zw| = |z||w|$;

2) l'argomento del prodotto è la somma degli argomenti: $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$.

Disegno

4.2. Rappresentazione esponenziale. Passiamo alla rappresentazione esponenziale di un numero complesso. Poniamo

$$e^{i\vartheta} := \cos\vartheta + i\sin\vartheta. \tag{4.4}$$

Questa formula si chiama *identità di Eulero*. Per il momento la accettiamo come definizione. Alla fine del corso ne daremo anche una dimostrazione basata sugli sviluppi di Taylor.

PROPOSIZIONE 4.1. L'esponenziale complesso ha le seguenti proprietà:

1) $|e^{i\vartheta}| = 1$ per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$;
2) $e^{i\vartheta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\vartheta+\varphi)}$ (formula di addizione).
3) $(e^{i\vartheta})^n = e^{in\vartheta}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (formula di de Moivre).

DIM. La 1) segue dalla definizione (4.4). La 2) è una riformulazione di (4.3). La formula 3) segue iterando la 2). □

Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ si può scrivere nel seguente modo

$$z = re^{i\vartheta},$$

dove $r = |z| \geq 0$ è il modulo di z e $\vartheta = \arg(z)$ è il suo argomento. Questa è la *rappresentazione esponenziale* di un numero complesso.

5. Radici di un numero complesso

Sia $w = Re^{i\varphi}$, con $R = |w| \geq 0$ e $\varphi = \arg(w) \in [0, 2\pi)$, un numero complesso fissato e sia $n \in \mathbb{N}$. Vogliamo risolvere l'equazione

$$z^n = w$$

nell'incognita $z \in \mathbb{C}$. In altri termini, vogliamo trovare (tutte) le radici n-esime del numero complesso $w \in \mathbb{C}$. Per il Teorema Fondamentale dell'Algebra, che vedremo fra breve, ci sono esattamente n soluzioni.

Cerchiamo soluzioni in forma esponenziale $z = re^{i\vartheta}$ con $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$ da determinare. Usando la formula di de Moivre, avremo

$$z^n = (re^{i\vartheta})^n = r^n(e^{i\vartheta})^n = r^n e^{in\vartheta}.$$

L'equazione $z^n = w$ diventa allora

$$r^n e^{in\vartheta} = Re^{i\varphi}.$$

Uguagliando i moduli si ottiene l'equazione

$$r^n = R \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt[n]{R}.$$

D'altra parte, si ha

$$e^{in\vartheta} = e^{i\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad n\vartheta = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

e quindi si trovano gli argomenti

$$\vartheta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Basta considerare gli indici $k = 0, 1, \dots, n-1$, perchè gli altri k danno delle ripetizioni. In conclusione, si ottengono n radici distinte

$$z_k = \sqrt[n]{R}\, \mathrm{e}^{i\vartheta_k}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Le radici si dispongono sui vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza centrata in 0 di raggio $\sqrt[n]{R}$.

Esempio 5.1. Vogliamo calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^4 = -1$. In primo luogo si scrive il numero complesso $w = -1$ in forma esponenziale: $R = |w| = 1$ mentre $\varphi = \arg(w) = \pi$. Dunque si ha $-1 = \mathrm{e}^{i\pi}$. Si trovano le quattro radici

$$z_k = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi\right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Le soluzioni si dispongono sui vertici di un quadrato:

Disegno

6. Numeri complessi come spazio metrico

Definiamo la distanza fra due numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$ nel seguente modo:

$$d(z, w) = |z - w|.$$

Si tratta della lunghezza del segmento che congiunge z e w:

Disegno

Osserviamo che, con $z = x + iy$ e $w = \xi + i\eta$, si ha

$$\begin{aligned} |z - w| &= |x + iy - (\xi + i\eta)| = |x + iy - \xi - i\eta| \\ &= |(x - \xi) + i(y - \eta)| \\ &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \end{aligned}$$

La distanza d verifica le seguenti proprietà:

(1) $d(z, w) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |z - w| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z - w = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = w$.
(2) $d(z, w) = |z - w| = |w - z| = d(w, z)$.
(3) $d(z, w) \leq d(z, \zeta) + d(\zeta, w)$ (Disuguaglianza triangolare).

La verifica della disuguaglianza triangolare è omessa.

Esempio 6.1. Fissati un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ ed un numero reale $r \geq 0$, l'insieme

$$A = \left\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\right\}$$

è la circonferenza di raggio r e centro z_0.

Esempio 6.2. Fissati un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ ed un numero reale $r \geq 0$, l'insieme

$$B = \left\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\right\}$$

è tutto il cerchio (bordo incluso).

Disegno

Esempio 6.3. L'insieme
$$E = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| + |z + i| = 4\}$$
è un'ellisse di fuochi i e $-i$.

7. Polinomi complessi

Definizione 7.1. Siano $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ numeri complessi. Un'espressione della forma
$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$
si dice *polinomio complesso* della variabile $z \in \mathbb{C}$. Se $a_n \neq 0$ diremo che $P(z)$ ha grado $n \in \mathbb{N}$.

Un numero complesso $z_0 \in \mathbb{C}$ si dice *radice* di un polinomio complesso $P(z)$ se $P(z_0) = 0$, ovvero se $P(z)$ calcolato in $z = z_0$ si annulla. Il vantaggio di lavorare con polinomi complessi è che hanno sempre un numero di radici pari al grado del polinomio.

Teorema 7.2 (Fondamentale dell'Algebra). Sia $P(z)$ un polinomio complesso di grado $n \in \mathbb{N}$. Allora l'equazione
$$P(z) = 0$$
ha esattamente n soluzioni (contate con la loro molteplicità), dette radici del polinomio.

La dimostrazione del Teorema è fuori dalla nostra portata ed è omessa.

Esempio 7.3. Il polinomio $P(x) = 1 + x^2$ della variabile reale $x \in \mathbb{R}$ non ha radici reali. Il polinomio complesso $P(z) = 1 + z^2$ ha invece esattamente due radici in campo complesso che sono $z = \pm i$.

Osservazione 7.4. Sia $P(z)$ un polinomio complesso di grado $n \geq 1$ con $a_n = 1$. Siano $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ le sue radici. Allora il polinomio può essere fattorizzato nel seguente modo
$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n).$$

Osservazione 7.5. Supponiamo che il polinomio complesso
$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$
abbia coefficienti reali: $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Allora
$$P(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(\bar{z}) = 0.$$
Dunque, nota una radice $z \in \mathbb{C}$ se ne conosce automaticamente una seconda $\bar{z} \in \mathbb{C}$.

Dim. Osserviamo preliminarmente che
$$P(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{P(z)} = 0.$$
Inoltre, si ha
$$\overline{P(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}^k = P(\bar{z}).$$

Abbiamo usato il fatto che i coefficienti sono reali: $\bar{a}_k = a_k$. L'affermazione segue. □

8. Esercizi svolti sui numeri complessi

ESERCIZIO 8.1. Calcolare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^3 = 8i.$$

Ovvero: calcolare le radici terze di $8i$

Soluzione. Scriviamo $8i$ in forma esponenziale:

$$\begin{array}{ll} R = |8i| = 8 & \text{modulo} \\ \varphi = \arg(8i) = \frac{\pi}{2} & \text{argomento.} \end{array}$$

Disegno

Cerchiamo soluzioni della forma $z = re^{i\vartheta}$ con $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$ da determinare. Abbiamo l'equazione

$$8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}} = z^3 = r^3 e^{3i\vartheta}.$$

Otteniamo

$$r^3 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad r = 2.$$

E poi

$$3\vartheta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2,$$

ovvero

$$\vartheta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2k}{3}\pi, \quad k = 0, 1, 2.$$

Precisamente: $\vartheta_0 = \pi/6$, $\vartheta_1 = \frac{5}{6}\pi$, $\vartheta_2 = \frac{3}{2}\pi$. Le soluzioni in forma algebrica sono:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\Big(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\Big) = 2\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{3} + i, \\ z_1 &= 2e^{i\frac{5}{6}\pi} = 2\Big(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\Big) = 2\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\Big) = -\sqrt{3} + i, \\ z_2 &= 2e^{i\frac{3}{2}\pi} = 2\Big(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\Big) = -2i. \end{aligned}$$

Nel piano di Gauss:

Disegno

ESERCIZIO 8.2. Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^4 - 2i\sqrt{3}z^2 - 4 = 0$$

e rappresentarle nel piano di Gauss.

Soluzione. Ponendo $w = z^2$ l'equazione diviene

$$w^2 - 2i\sqrt{3}w - 4 = 0.$$

Usiamo la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado:

$$\begin{aligned} w_\pm &= \frac{2i\sqrt{3} \pm \sqrt{4i^2 \cdot 3 + 16}}{2} \\ &= \frac{2i\sqrt{3} \pm 2}{2} = \pm 1 + i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Dobbiamo risolvere le due equazioni

$$
\begin{aligned}
z^2 &= w_+ = 1 + i\sqrt{3}\\
z^2 &= w_- = -1 + i\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Risolviamo la prima equazione. Scriviamo w_- in forma esponenziale. Modulo e argomento sono (osserviamo che w_+ è nel primo quadrante):

$$
\begin{aligned}
R &= |w_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\\
\varphi &= \arg(w_+) = \operatorname{arctg}\Big(\frac{\sqrt{3}}{1}\Big) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

Dunque, si ha

$$
w_+ = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big).
$$

Otteniamo l'equazione per l'incognita $z = re^{i\vartheta}$, con $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$:

$$
r^2 e^{i2\vartheta} = z^2 = w_+ = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.
$$

Si ottengono le due equazioni:

$$
\begin{aligned}
r^2 &= 2 \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt{2}\\
2\vartheta &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k = 0, 1.
\end{aligned}
$$

Gli argomenti sono

$$
\vartheta_0 = \frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad \vartheta_1 = \frac{7}{6}\pi.
$$

Si trovano le prime due soluzioni in forma algebrica:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt{2}e^{i\vartheta_0} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\\
z_1 &= \sqrt{2}e^{i\vartheta_1} = -\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i
\end{aligned}
$$

In modo analogo si risolve l'equazione $z^2 = w_- = -1 + i\sqrt{3}$. Si trovano le soluzioni:

$$
\begin{aligned}
z_2 &= \sqrt{2}\Big(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\\
z_3 &= \sqrt{2}\Big(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big).
\end{aligned}
$$

Esercizio 8.3. Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$
z^3 = 9\bar{z}.
$$

Soluzioni. Certamente $z = 0$ è una soluzione. Cerchiamo soluzioni in forma esponenziale $z = re^{i\vartheta}$ con $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Osserviamo che

$$
\begin{aligned}
\bar{z} &= \overline{re^{i\vartheta}} = r\overline{e^{i\vartheta}}\\
&= r\big(\overline{\cos\vartheta + i\sin\vartheta}\big) = r(\cos\vartheta - i\sin\vartheta)\\
&= r\big(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)\big) = re^{-i\vartheta}.
\end{aligned}
$$

Dunque, si trova l'equazione

$$z^3 = 9\bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad r^3 e^{3i\vartheta} = 9r e^{-i\vartheta},$$

e deduciamo che

$$r^3 = 9r \quad \Leftrightarrow \quad r = 0 \quad \text{oppure} \quad r = 3,$$

e poi

$$3\vartheta = -\vartheta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ovvero

$$\vartheta_k = \frac{k}{2}\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Troviamo le soluzioni

$$z_1 = 3e^{i \cdot 0} = 3, \quad z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i, \quad z_3 = 3e^{i\pi} = -3, \quad z_4 = 3e^{i\frac{3}{2}\pi} = -3i,$$

cui va aggiunta la soluzione $z_0 = 0$.

Esercizio 8.4. Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^3\bar{z} + 3z^2 - 4 = 0.$$

Soluzione. Riscriviamo l'equazione in questo modo

$$z^2(z\bar{z} + 3) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad z^2(|z|^2 + 3) = 4. \tag{8.5}$$

Eguagliamo i moduli a destra e sinistra

$$|z^2|(|z|^2 + 3) = |z^2(|z|^2 + 3)| = |4| = 4,$$

e osserviamo che $|z^2| = |z|^2$. Si ottiene dunque l'equazione per l'incognita $t = |z|^2 \geq 0$

$$t^2 + 3t - 4 = 0.$$

Le soluzioni sono $t = -4$, che è da scartare, e $t = 1$, che è accettabile. Dunque, deve essere $|z|^2 = 1$ e quindi $|z| = 1$. e sostituendo tale valore nell'equazione (8.5) si ottiene $z^2 = 1$ che ha le soluzioni $z = \pm 1$. Queste sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione.

Esercizio 8.5. Disegnare nel piano di Gauss l'insieme dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(iz^2 - i\bar{z}^2) \geq -4 \\ \left| z - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\sqrt{2} \right| \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

Soluzione. L'insieme

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} \, : \, \left| z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{2} \right) \right| \leq \sqrt{2} \right\}$$

è un cerchio di centro $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{2}$ e raggio $r = \sqrt{2}$ (circonferenza inclusa):

Disegno

Studiamo la prima disequazione. Poniamo $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} iz^2 - i\bar{z}^2 &= i(x + iy)^2 - i(x - iy)^2 \\ &= i(x^2 + 2ixy - y^2) - i(x^2 - 2ixy - y^2) \\ &= -2xy - 2xy + i(x^2 - x^2 - y^2 + y^2) = -4xy. \end{aligned}$$

Dunque, si ha

$$\mathrm{Re}(iz^2 - i\bar{z}^2) \geq -4 \quad \Leftrightarrow \quad -4xy \geq -4 \quad \Leftrightarrow \quad xy \leq 1.$$

L'insieme

$$A = \big\{z = x + iy \in \mathbb{C} \, : \, xy \leq 1\big\}$$

è la regione del piano delimitata dai due rami di iperbole $xy = 1$ (iperbole inclusa):

Disegno

In conclusione, le soluzioni sono date dall'intersezione $A \cap C$:

Disegno

Esercizio 8.6. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro fissato. Disegnare nel piano complesso il seguente insieme

$$S_\alpha = \Big\{z \in \mathbb{C} : \frac{\bar{z} + 1 - i\alpha}{z + 1} \in \mathbb{R}\Big\}$$

Soluzione. In primo luogo deve essere $z + 1 \neq 0$, ovvero:

$$z \neq -1.$$

L'insieme S_α è formato dai punti $z \neq -1$ tali che

$$\mathrm{Im}\Big(\frac{\bar{z} + 1 - i\alpha}{z + 1}\Big) = 0.$$

Calcoliamo il quoziente, ponendo $z = x + iy$:

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{z} + 1 - i\alpha}{z + 1} &= \frac{\bar{z} + 1 - i\alpha}{z + 1}\frac{\bar{z} + 1}{\bar{z} + 1} \\
&= \frac{\bar{z}^2 + \bar{z} + \bar{z} + 1 - i\alpha\bar{z} - i\alpha}{|z|^2 + z + \bar{z} + 1} \\
&= \frac{(x - iy)^2 + 2(x - iy) + 1 - i\alpha(x - iy) - i\alpha}{x^2 + y^2 + 2x + 1} \\
&= \frac{x^2 - 2ixy - y^2 + 2x - 2iy + 1 - i\alpha x - \alpha y - i\alpha}{x^2 + y^2 + 2x + 1}.
\end{aligned}$$

Annulliamo la parte immaginaria:

$$\begin{aligned}
-2xy - 2y - \alpha x - \alpha = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2y(x + 1) + \alpha(x + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x + 1)(2y + \alpha) = 0.
\end{aligned}$$

Quindi deve essere $x+1 = 0$ oppure $2y+\alpha = 0$. Nel primo caso si ha la retta $x = -1$ (ma il punto $z = -1$ è escluso).

Disegno

Nel secondo caso si ha la retta $y = -\frac{\alpha}{2}$.

Esercizio 8.7. Determinare $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $z_0 = i$ sia radice del polinomio

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + \lambda z^2 - 2z + 2.$$

Calcolare quindi tutte le radici.

Soluzione. Il numero complesso $z_0 = i$ è radice del polinomio se

$$0 = P(i) = i^4 - 2i^3 + \lambda i^2 - 2i + 2 = 3 - \lambda.$$

Quindi $\lambda = 3$. Il polinomio è

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2.$$

Osserviamo che i coefficienti del polinomio sono reali. Due radici del polinomio sono dunque $z_0 = i$ e $\bar{z}_0 = -i$. Le altre due radici sono $z_1 \in \mathbb{C}$ e $\bar{z}_1 \in \mathbb{C}$, da determinare. Il polinomio si fattorizza nel seguente modo:

$$\begin{aligned} P(z) &= (z-i)(z+i)(z-z_1)(z-\bar{z}_1) \\ &= (z^2+1)(z^2 - z\bar{z}_1 - z_1 z + |z_1|^2) \\ &= z^4 - (z_1+\bar{z}_1)z^3 + (1+|z_1|^2)z^2 - (z_1+\bar{z}_1)z + |z_1|^2. \end{aligned}$$

Eguagliando i coefficienti del polinomio si ottiene il sistema di equazioni nell'incognita z_1:

$$\begin{cases} -2 = -(z_1 + \bar{z}_1) \\ 3 = |z_1|^2 + 1 \\ -2 = -(z_1 + \bar{z}_1) \\ 2 = |z_1|^2. \end{cases}$$

Le ultime due equazioni sono doppioni delle prime due. Dunue si ha il sistema

$$\begin{cases} z_1 + \bar{z}_1 = 2 \\ |z_1|^2 = 2 \end{cases}$$

Se $z_1 = x_1 + iy_1$, la prima equazione fornisce $x_1 = 1$ e quindi la seconda diventa

$$2 = |z_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 = 1 + y_1^2,$$

da cui si deduce che $y_1^2 = 1$, ovvero $y_1 = \pm 1$. Scegliendo il segno $+$ si trova la coppia di soluzioni

$$z_1 = 1 + i, \quad \bar{z}_1 = 1 - i.$$

Scegliendo il segno $-$ si trovano le stesse soluzioni, scambiate fra loro.

In conclusione, le quattro soluzioni sono $\pm i$ e $1 \pm i$.

Esercizio 8.8. Disegnare nel piano complesso l'insieme delle $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{\sqrt{4 - |z-4|}}{\sqrt{4 - |z+4i|}} > 1. \tag{8.6}$$

Soluzione. Abbiamo le restrizioni:

$$4 - |z-4| \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |z-4| \leq 4, \tag{8.7}$$

$$4 - |z+4i| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |z+4i| < 4. \tag{8.8}$$

Rappresentiamo il dominio di esistenza nel seguente disegno:

Disegno

Con tali restrizioni, possiamo elevare al quadrato la disuguaglianza (8.6) e ottenere

$$\begin{aligned} \frac{4-|z-4|}{4-|z+4i|} > 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 4-|z-4| > 4-|z+4i| \\ &\Leftrightarrow \quad |z+4i| > |z-4| \\ &\Leftrightarrow \quad |z+4i|^2 > |z-4|^2. \end{aligned}$$

Ponendo $z = x+iy$ si ottiene la disuguaglianza equivalente:

$$\begin{aligned} |x+iy+4i|^2 > |x+iy-4|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2+(y+4)^2 > (x-4)^2+y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+8y+16 > x^2-8x+16+y^2, \end{aligned}$$

ovvero $y > -x$:

Disegno

In definitiva, le soluzioni sono:

Disegno

CHAPTER 3

Successioni numeriche

1. Successioni numeriche convergenti e divergenti

Una *successione reale* è una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Indicheremo con $a_n = a(n) \in \mathbb{R}$ l'*elemento n-esimo* della successione. La successione si indica con il simbolo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La successione si può anche definire elencando in modo ordinato i suoi elementi. Ad esempio, la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, è formata dagli elementi

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots .$$

Definizione 1.1 (Successioni convergenti). Diciamo che una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ad un limite* $L \in \mathbb{R}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Diremo in questo caso che la successione è *convergente* e scriveremo anche

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{oppure} \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L.$$

Il numero L si dice *limite della successione*.

Esempio 1.2. Verifichiamo ad esempio che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e cerchiamo $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Quindi è sufficiente scegliere un numero naturale $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Un tale numero esiste per la Proprietà di Archimede dei numeri reali.

Proposizione 1.3 (Unicità del limite). Se una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite $L \in \mathbb{R}$ allora questo limite è unico.

Dim. Siano L ed M entrambi limiti della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fissato $\varepsilon > 0$ a piacere, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|a_n - M| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$|L - M| = |L - a_n + a_n - M| \leq |L - a_n| + |a_n - M| < 2\varepsilon.$$

Siccome $\varepsilon > 0$ è arbitrario, questo implica che $|L - M| = 0$ e quindi $L = M$. □

Definizione 1.4. Diremo che una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞ ("più infinito") se per ogni $M \in \mathbb{R}$ (arbitrariariamente grande) esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \geq M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Analogamente, diremo che una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$ ("meno infinito") se per ogni $M \in \mathbb{R}$ (arbitrariariamente grande) esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \leq -M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Delle successioni reali che non cadono nè nel caso della Definizione 1.1 (successione convergente) nè nei casi della Definizione 1.4 diremo che *non hanno limite*, nè finito nè $\pm\infty$.

Una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *limitata* se l'insieme $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è limitato in $\mathbb{R}$. Equivalentemente, la successione è limitata se esiste $C > 0$ tale che

$$|a_n| \leq C < \infty \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Proposizione 1.5. Se una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente allora è limitata.

Dim. Sia $L \in \mathbb{R}$ il limite della successione. Fissiamo a nostro piacere un $\varepsilon > 0$. Allora esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n > \bar{n}$. Scegliamo

$$C = \max\{|a_1|, \dots, |a_{\bar{n}}|, |L| + \varepsilon\}.$$

Allora $|a_n| \leq C$ per ogni $n = 1, \dots, \bar{n}$, elementarmente. Inoltre, per $n > \bar{n}$ si ha

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < \varepsilon + |L| \leq C.$$

□

Teorema 1.6 (Proprietà generali dei limiti). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni in $\mathbb{R}$ convergenti. Allora:

1) La successione somma $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e inoltre
$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$
2) La successione prodotto $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e inoltre
$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$
3) Se $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e il limite di $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è 0, allora la successione quoziente $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e inoltre
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

Dim. Indichiamo con $L, M \in \mathbb{R}$ i limiti delle successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|b_n - M| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$.

1) Allora si ha per ogni $n \geq \bar{n}$:

$$|a_n + b_n - (L + M)| \leq |a_n - L| + |b_n - M| < 2\varepsilon.$$

2) Per la Proposizione 1.5, esiste $C > 0$ tale che $|a_n| \le C$ e $|b_n| \le C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha per ogni $n \ge \bar{n}$:

$$|a_n b_n - LM| = |a_n b_n - Lb_n + Lb_n - LM| \le |b_n||a_n - L| + |L||b_n - M| \le C\varepsilon + |L|\varepsilon = (C + |L|)\varepsilon.$$

3) Per il punto 2), è sufficiente provare l'affermazione nel caso $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siccome $M \neq 0$ per ipotesi, esiste $\widehat{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \ge \widehat{n}$ si ha

$$|b_n| = |b_n - M + M| \ge |M| - |b_n - M| \ge \frac{|M|}{2}.$$

Dunque, per $n \ge \max\{\bar{n}, \widehat{n}\}$ si ha

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{M}\right| = \frac{|b_n - M|}{|b_n||M|} \le \frac{2\varepsilon}{M^2}.$$

□

Teorema 1.7 (Teorema del confronto). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali tali che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $n \ge \bar{n}$ si ha

$$a_n \le b_n \le c_n.$$

Supponiamo che esistano i limiti $L, M \in \mathbb{R}$ delle successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, rispettivamente. Se $L = M$, allora anche $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e $\lim_{n\to\infty} b_n = M$.

Dim. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|c_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \ge \bar{n}$. Allora si ha anche

$$b_n - L \le c_n - L \le |c_n - L| < \varepsilon,$$
$$L - b_n \le L - a_n \le |L - a_n| < \varepsilon,$$

e quindi $|b_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \ge \bar{n}$. □

Definizione 1.8. Sia $A(n)$ un'affermazione che riguarda il generico numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Se esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $A(n)$ è vera per ogni $n \ge \bar{n}$ diremo che l'affermazione $A(n)$ è vera *definitivamente*.

Il Teorema sulle operazioni coi limiti e il Teorema del confronto coprono solo alcuni dei casi che si possono presentare. Nel seguito discutiamo alcune altre situazioni esemplari.

Proposizione 1.9. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione infinitesima (ovvero $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata. Allora la successione prodotto $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima.

Dim. Sia $C > 0$ una costante tale che $|b_n| \le C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| \le \varepsilon$ per ogni $n \ge \bar{n}$. Allora si ha

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \le C\varepsilon, \quad \text{per ogni } n \ge \bar{n}.$$

Questo prova che la successione prodotto è infinitesima. □

Esercizio 1.1. Provare le seguenti affermazioni.

1) Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali tali che $a_n \le b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$$

2) Siano $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali tali che $b_n \le c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha
$$\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty.$$
3) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che diverge a ∞, e sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale limitata. Provare che la successione somma $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞.
4) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che diverge a ∞, e sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale, positiva, staccata da 0 ovvero: esiste $\delta > 0$ tale che $b_n \ge \delta$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora la successione prodotto $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞.

2. Esempi di successioni elementari

Esempio 2.1 (Quoziente di polinomi). Siano P e Q polinomi a coefficienti reali nella variabile $x \in \mathbb{R}$ di grado p e q, rispettivamente, con $p, q \in \mathbb{N}$. Precisamente, supponiamo di avere
$$P(x) = a_p x^p + \ldots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$Q(x) = b_q x^q + \ldots + b_1 x + b_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Avremo $a_p \neq 0$ e $b_q \neq 0$. Senza perdere di generalità supponiamo che $a_p > 0$ e $b_q > 0$. Allora si ha
$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \infty & \text{se } p > q, \\ \dfrac{a_p}{b_q} & \text{se } p = q, \\ 0 & \text{se } q > p. \end{cases}$$
La verifica è elementare e utilizza il teorema sulle operazioni con i limiti partendo dalla seguente identità:
$$\frac{a_p n^p + \ldots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \ldots + b_1 n + b_0} = n^{p-q} \frac{a_p + a_{p-1} n^{-1} \ldots + a_1 n^{1-p} + a_0 n^{-p}}{b_q + b_{q-1} n^{-1} + \ldots + b_1 n^{1-q} + b_0 n^{-q}}.$$

Esempio 2.2 (Successione geometrica). Sia $q \in \mathbb{R}$ un numero reale fissato. Studiamo la convergenza delle successione geometrica $a_n = q^n$ per $n \in \mathbb{N}$. Verificheremo le seguenti affermazioni:
$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |q| < 1, \\ 1 & \text{se } q = 1, \\ \infty & \text{se } q > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \le -1. \end{cases}$$
L'ultima affermazione significa che il limite non esiste nè in $\mathbb{R}$ nè $\pm\infty$.

Esaminiamo il caso $-1 < q < 1$. È sufficiente considerare il caso $0 < q < 1$. Allora $q = 1 - x$ con $x \in (0, 1)$. Per tali x valgono le disuguaglianze
$$0 \le (1 - x)^n \le \frac{1}{1 + nx}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Si veda l'Esercizio 5 del Foglio 1. Siccome
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + nx} = 0,$$

dal Teorema del confronto segue che

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} (1-x)^n = 0.$$

Nel caso $q > 1$ si può scrivere $q = 1 + x$ con $x > 0$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli si ottiene

$$q^n = (1+x)^n \geq 1 + nx,$$

e per confronto si trova $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$.

Esempio 2.3 (Radice n-esima). Per ogni numero reale $p > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1.$$

È sufficiente considerare il caso $p > 1$. Il caso $0 < p < 1$ si riduce a questo passando ai reciproci. Se $p > 1$ si ha $\sqrt[n]{p} = 1 + a_n$ con $a_n > 0$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli

$$p = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n,$$

si ottiene

$$0 < a_n \leq \frac{p-1}{n},$$

e quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Esempio 2.4 (Radice n-esima di una potenza di n). Per ogni numero reale $\beta > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\beta} = 1.$$

Proviamo l'effermazione nel caso $\beta = 1$. Si ha certamente $\sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1 + a_n$ con $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$. Usando nuovamente la disuguaglianza di Bernoulli si trova

$$\sqrt{n} = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n,$$

e quindi

$$0 \leq a_n \leq \frac{\sqrt{n} - 1}{n}.$$

Dal Teorema del confronto segue che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. In conclusione, si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^2 = 1.$$

Esempio 2.5 (Confronto fra potenze ed esponenziali). Siano $a, \beta \in \mathbb{R}$ numeri reali tali che $a > 1$ e $\beta > 0$. Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0.$$

Esaminiamo la successione

$$b_n = \frac{n^\beta}{a^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\beta a^n}{a^{n+1} n^\beta} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^\beta = \frac{1}{a} < 1,$$

fissato $\frac{1}{a} < q < 1$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $b_{n+1} < qb_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Iterando tale disuguaglianza si ottiene

$$0 \leq b_n \leq qb_{n-1} \leq \ldots \leq q^{n-\bar{n}} b_{\bar{n}} = q^n \cdot \frac{b_{\bar{n}}}{q^{\bar{n}}}.$$

Per confronto con la successione geometrica si deduce che $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Esempio 2.6 (Confronto fra esponenziale e fattoriale). Sia $a \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $a > 0$. Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Esaminiamo la successione

$$b_n = \frac{a^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0,$$

fissato $0 < q < 1$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $b_{n+1} < qb_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Come sopra, si conclude che $b_n \to 0$ per $n \to \infty$.

Esempio 2.7 (Confronto fra potenze e logaritmi). Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha, \beta > 0$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} = 0.$$

Con la sostituzione $x_n = \log n$, ovvero $n = e^{x_n}$, si ottiene per $n \geq 1$

$$0 \leq \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} = \frac{x_n^\beta}{e^{x_n \alpha}} \leq \frac{([x_n]+1)^\beta}{(e^\alpha)^{[x_n]}}.$$

Siccome $e > 1$ e $\alpha > 0$, la base dell'esponenziale verifica $e^\alpha > 1$. Dunque, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che risulti

$$\frac{([x_n]+1)^\beta}{(e^\alpha)^{[x_n]}} < \varepsilon$$

non appena $[x_n] > M$. Ma siccome

$$\lim_{n\to\infty} [x_n] = \lim_{n\to\infty} [\log n] = \infty,$$

esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $[x_n] > M$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Abbiamo così provato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$0 \leq \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} < \varepsilon.$$

3. Successioni monotone

Definizione 3.1 (Successioni monotone). Una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice:

i) *crescente* se $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
ii) *strettamente crescente* se $a_n < a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
iii) *decrescente* se $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
iv) *strettamente decrescente* se $a_n > a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Una successione crescente o decrescente si dice *monotona*.

PROPOSIZIONE 3.2. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione crescente e (superiormente) limitata. Allora la successione è convergente e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\big\{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

DIM. L'insieme $A = \big\{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\}$ è superiormente limitato e quindi esiste finito

$$L = \sup A \in \mathbb{R}.$$

Siccome L è un maggiorante di A si ha $a_n \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Siccome L è il minimo dei maggioranti di A, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\bar{n}} > L - \varepsilon$. Dal fatto che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, si deduce che per $n \geq \bar{n}$ si ha:

$$a_n \geq a_{\bar{n}} > L - \varepsilon.$$

Abbiamo dunque provato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ risulta

$$L - \varepsilon < a_n \leq L < L + \varepsilon.$$

Questa è la tesi della proposizione. □

Se una successione crescente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è superiormente limitata, allora un argomento analogo al precedente prova che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Per le successioni decrescenti valgono affermazioni analoghe. Ad esempio, se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e inferiormente limitata, allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Nella dimostrazione della Proposizione 3.2 abbiamo usato l'Assioma di completezza dei numeri reali per assicurarci dell'esistenza del numero $L \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 3.1. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la seguente successione definita in modo ricorsivo:

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad n \geq 0.$$

Provare che la successione converge a calcolarne il limite.

Soluzione. Mostriamo che la successione è crescente e superiormente limitata. Sia $f(x) = \sqrt{2+x}$ la funzione, definita per $x \geq -2$, che interviene nella definizione ricorsiva $a_{n+1} = f(a_n)$. Studiamo la disuguaglianza

$$f(x) > x \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 2.$$

Dunque, fintantochè $0 \leq a_n < 2$, risulta $a_{n+1} > a_n$. Proviamo per induzione che $0 \leq a_n < 2$. Per $n = 0$ questo è chiaro. Inoltre, si ha

$$a_{n+1} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2 + a_n} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad a_n < 2.$$

Questo prova che la successione è crescente (strettamente) e superiormente limitata. Dunque esiste finito

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Passando al limite nella relazione ricorsiva $a_{n+1} = f(a_n)$ ed usando la continuità di f si trova

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(L).$$

Le soluzioni dell'equazione $L = f(L)$ sono $L = -1$ che è da scartare ed $L = 2$. Dunque, il limite è $L = 2$.

4. Esercizi svolti

Esercizio 4.1. Usando la definizione provare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - \log(n+1)}{n} = \infty.$$

Soluzione. Fissato $M > 0$ dobbiamo trovare $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si abbia

$$\frac{n^2 - \log(n+1)}{n} \geq M.$$

Tale disequazione non si risolve in modo esatto. Usiamo il metodo delle maggiorazioni. Siccome $\log(n+1) \leq n$, avremo

$$\frac{n^2 - \log(n+1)}{n} \geq n - 1.$$

Risolviamo la disequazione semplificata

$$n - 1 \geq M \quad \Leftrightarrow \quad n \geq M + 1.$$

Possiamo dunque scegliere $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} \geq M+1$. Un tale $\bar{n}$ esiste per il Principio di Archimede. Dunque, per ogni $n \geq \bar{n}$ avremo

$$\frac{n^2 - \log(n+1)}{n} \geq n - 1 \geq \bar{n} - 1 \geq M.$$

Esercizio 4.2. Calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \Big).$$

Soluzione. Abbiamo le stime

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.9}$$

e inoltre

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.10}$$

Siccome $x \mapsto \sqrt{x}$ è una funzione continua:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)} = \sqrt{1} = 1,$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1, \tag{4.11}$$

e per il Teorema del Confronto da (4.9),(4.10) e (4.11) deduciamo che $L = 1$.

Esercizio 4.3. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}.$$

Soluzione. Dalle disuguaglianze

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \le \sqrt[n]{2^n + 3^n} \le \sqrt[n]{3^n + 3^n} = 3\sqrt[n]{2},$$

e dal fatto che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1,$$

segue per il Teorema del Confronto che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3.$$

Esercizio 4.4. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n\sin n}{3n^2 + \cos n}.$$

Soluzione. Abbiamo

$$\frac{n^2 - n\sin n}{3n^2 + \cos n} = \frac{n^2\left(1 - \frac{\sin n}{n}\right)}{n^2\left(3 + \frac{\cos n}{n^2}\right)} = \frac{1 - \frac{\sin n}{n}}{3 + \frac{\cos n}{n^2}}.$$

Poichè "successione infinitesima per successione limitata = successione infinitesima", si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n^2} = 0.$$

Dal Teorema sul quoziente dei limiti otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n\sin n}{3n^2 + \cos n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{\sin n}{n}}{3 + \frac{\cos n}{n^2}} = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 4.5. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} n^{2/3}\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right).$$

Soluzione. Usiamo l'identità

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

per ottenere

$$\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n^{2/3}\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2/3}}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+1/n)^2} + \sqrt[3]{1+1/n} + 1} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Esercizio 4.6. Calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{n2^n + \log^4 n}{3^n + n^2}.$$

Soluzione. Il termine dominante al numeratore è $n2^n$, quello al denominatore è 3^n:

$$\frac{n2^n + \log^4 n}{3^n + n^2} = \frac{n2^n}{3^n} \frac{1 + \frac{\log^4 n}{n2^n}}{1 + \frac{n^2}{3^n}}.$$

Osserivamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^4 n}{n2^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n2^n}{3^n} = \frac{n}{(3/2)^n} = 0.$$

Dal Teorema sulle operazioni coi limiti segue che $L = 0$.

CHAPTER 4

Serie numeriche

1. Serie numeriche. Definizioni

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una succesione reale. Vogliamo definire, quando possibile, la somma di tutti gli a_n al variare di $n \in \mathbb{N}$. Tale somma di infiniti termini si indica nel seguente modo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n. \tag{1.12}$$

Con tale notazione si vuole indicare un numero reale. Chiameremo un'espressione come in (1.12) una serie reale.

Formiamo la *successione delle somme parziali*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \ldots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ può convergere, può divergere a ∞ o $-\infty$, oppure può non avere limite.

Definizione 1.1 (Serie convergente). Se la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un numero $s \in \mathbb{R}$, porremo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s,$$

e diremo che la serie *converge* ed ha come *somma* s.

Se la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞ o $-\infty$, diremo che la serie *diverge* a ∞ o $-\infty$.

Se la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non ha limite, nè finito nè infinito, diremo che la serie *non converge*.

Il generico addendo a_n che appare nella serie (1.12) si dice *termine generale* della serie, ed $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è la successione dei termini generali.

Teorema 1.2 (Condizione necessaria di convergenza). Se una serie reale

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

converge allora la successione dei termini generali è infinitesima, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dim. Sia $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione delle somme parziali. Allora avremo

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s.$$

Dunque, si deduce che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0.$$

□

2. Serie geometrica. Serie telescopiche. Serie armonica generalizzata

2.1. Serie geometrica. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $x \neq 1$. Ricordiamo la formula per le somme geometriche parziali

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se $|x| < 1$, allora $\lim\limits_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$. Se invece $|x| \geq 1$ il limite non esiste (o non esiste finito). Dunque, si ottiene la formula per la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in \mathbb{R},\ |x| < 1.$$

2.2. Serie telescopiche. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale e formiamo la successione delle differenze $b_n = a_{n+1} - a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k = a_{n+1} - a_0.$$

Se ora la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un limite L, allora la serie con termine generale b_n converge e inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = L - a_0.$$

Ad esempio, si trova

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) = 1.$$

L'ultima serie è talvolta chiamata serie di Mengoli.

2.3. Seria armonica generalizzata. Per $\alpha > 0$ si consideri la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Proposizione 2.1. La serie precedente converge se e solo se $\alpha > 1$.

Dim. Iniziamo dal caso $\alpha = 2$. Dalle disuguaglianze

$$n^2 \geq n(n-1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

si ottiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \infty$$

e per confronto la serie a sinistra converge. Per $\alpha \geq 2$ si ha $n^\alpha \geq n^2$ e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

La serie a sinistra converge.

Passiamo al caso $\alpha = 1$. In questo caso si ha

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\Big) + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\Big) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty,\end{aligned}$$

e dunque la serie diverge a ∞.

Quando $0 < \alpha < 1$ si ha $n^\alpha \leq n$ e dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

e per confronto la serie a sinistra diverge a ∞.

Rimane da discutere il caso $1 < \alpha < 2$. In questo caso la serie converge, ma la dimostrazione di questo fatto è rinviata.

□

3. Criterio della radice e del rapporto per serie reali

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione reale non negativa, allora la successione delle somme parziali

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

è monotona crescente e quindi il limite di $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esiste sempre, finito oppure ∞.

Iniziamo con il Criterio del confronto.

Teorema 3.1 (Criterio del confronto). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali tali che $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora:

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty;$

ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty.$

La verifica del Teorema segue dall'analogo enunciato per le successioni.

Teorema 3.2 (Criterio della radice). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale non negativa, $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e supponiamo che esista

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Allora si hanno i seguenti due casi:

i) Se $L < 1$ allora la serie converge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

ii) Se $L > 1$ allora la serie diverge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$. Di più, il termine generale verifica

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Se $L = 1$ la serie può sia convergere che divergere a ∞.

DIM. i) Esistono $q \in (0,1)$ e $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tali che $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dunque $a_n \leq q^n$ per ogni $n \geq \bar{n}$, e quindi

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^n < \infty.$$

Questo prova la convergenza della serie.

ii) Esistono $q > 1$ e $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tali che $\sqrt[n]{a_n} > q$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dalla disuguaglianza $a_n > q^n$ si deduce per confronto che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Quindi la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è infinitesima, e per la condizione necessaria di convergenza la serie diverge.

□

TEOREMA 3.3 (Criterio del rapporto). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale positiva, $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e supponiamo che esista $L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$. Si hanno i seguenti due casi:

i) Se $L < 1$ allora la serie converge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

ii) Se $L > 1$ allora la serie diverge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$. Di più, il termine generale verifica

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Se $L = 1$ la serie può sia convergere che divergere a ∞.

DIM. i) Esistono $q \in (0,1)$ e $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tali che $a_{n+1}/a_n \leq q$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dunque $a_n \leq q a_{n-1} \leq q^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}$ per ogni $n \geq \bar{n}$, e pertanto

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n \leq a_{\bar{n}} q^{-\bar{n}} \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^n < \infty.$$

Questo prova la convergenza della serie.

ii) Come sopra, si arriva alla disuguaglianza $a_n \geq q a_{n-1} \geq q^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}$ dove ora $q > 1$. Non è dunque verificata la condizione necessaria di convergenza e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. □

4. Esercizi svolti

ESERCIZIO 4.1. Dire se converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}.$$

Soluzione. La serie non converge in quanto non è verificata la condizione necessaria di convergenza

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0.$$

ESERCIZIO 4.2. Calcolare la somma delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n-1}}.$$

Soluzione. Usiamo la formula per la serie geometrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=-1+\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n=-1+\frac{1}{1-1/2}=1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2n-1}}=3\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{9}\Big)^n=3\Big(-1+\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{9}\Big)^n\Big)=3\Big(-1+\frac{1}{1-1/9}\Big)=\frac{3}{8}.$$

Esercizio 4.3. Stabilire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos n}{\sqrt{1+n^3}}.$$

Soluzione. La serie è a termine positivi:

$$\frac{1+\cos n}{\sqrt{1+n^3}}\geq 0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Usiamo il Teorema del Confronto

$$\frac{1+\cos n}{\sqrt{1+n^3}}\leq\frac{2}{\sqrt{1+n^3}}\leq\frac{2}{n^{3/2}}.$$

Essendo $3/2>1$, la serie seguente converge

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{3/2}}<\infty,$$

e per Il Teorema del confronto anche la serie data converge

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos n}{\sqrt{1+n^3}}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{3/2}}<\infty.$$

Esercizio 4.4. Scrivere il numero decimale periodico

$$x=0,454545\ldots=0,\overline{45}$$

in forma razionale $x=p/q$ con $p,q\in\mathbb{N}$.

Soluzione. Il significato della rappresentazione decimale è

$$\begin{aligned}0,\overline{45}&=\frac{4}{10}+\frac{5}{10^2}+\frac{4}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{10^{2n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{10^{2n}}\\&=\frac{4}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{100}\Big)^n+5\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{10}\Big)^n\\&=\frac{2}{5}\frac{1}{1-1/100}+5\Big(\frac{1}{1-1/100}-1\Big)\\&=\frac{45}{99}=\frac{5}{11}.\end{aligned}$$

Esercizio 4.5. Verificare che la serie esponenziale

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Soluzione. È una serie a termini positivi:

$$a_n = \frac{1}{n!} > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Usiamo il Criterio del Rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Dunque, si ha

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1,$$

e dunque la serie converge.

Esercizio 4.6. Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che converga la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2+n)}{n} |x|^n.$$

Soluzione. Si tratta di una serie a termini positivi:

$$a_n = \frac{\log(2+n)}{n} |x|^n \geq 0.$$

Possiamo usare il Criterio della Radice. Avremo:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{\log(2+n)}{n}} |x|.$$

Partiamo dalle seguenti disuguaglianze:

$$\frac{\sqrt[n]{\log 2}}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{\frac{\log(2+n)}{n}} \leq \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{2}.$$

Dai limiti noti

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log 2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

segue dal Teorema del Confronto che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\log(2+n)}{n}} = 1.$$

Di conseguenza:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = |x|.$$

Abbiamo due casi:

1) $L = |x| < 1$. La serie converge.
2) $L = |x| > 1$. La serie diverge a ∞.

Rimane da discutere il caso $L = |x| = 1$, ovvero $x = \pm 1$. In questo caso la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+2)}{n}.$$

Questa serie diverge, per confronto con la serie armonica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+2)}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log 2}{n} = \infty.$$

ESERCIZIO 4.7. Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che converga la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}}{n^\alpha}.$$

Soluzione. Riscriviamo il termine generale nel seguente modo:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right)\left(\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}\right)}{n^\alpha\left(\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}\right)} \\ &= \frac{(n^3+1)-(n^3-1)}{n^\alpha n^{3/2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}\right)} \\ &= \frac{2}{n^{\alpha+3/2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}\right)}. \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$1 \leq \sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^3}} \leq \sqrt{2}+1, \quad n \in \mathbb{N},$$

e dunque

$$\frac{2}{\sqrt{2}+1}\frac{1}{n^{\alpha+3/2}} \leq a_n \leq \frac{2}{n^{\alpha+3/2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Siccome

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+3/2}} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha+\frac{3}{2} > 1,$$

dal Teorema del Confronto segue che la serie data converge se e solo se $\alpha > -1/2$.

ESERCIZIO 4.8. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{1+n+x^2n^2}.$$

Soluzione. Distinguiamo i due casi: 1) $x = 0$; 2) $x \neq 0$.

Se $x = 0$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Siccome $\sqrt{n+1} \leq \sqrt{2n} \leq \sqrt{2}\sqrt{n}$ per $n \geq 1$, avremo per il Teorema del Confronto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = \infty.$$

L'ultima serie diverge essendo $1/2 < 1$.

Quando $x \neq 0$ si può maggiorare il termine generale nel seguente modo:

$$\frac{\sqrt{n+1}}{1+n+x^2n^2} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{x^2n^2} \leq \frac{\sqrt{2n}}{x^2n^2} = \frac{\sqrt{2}}{x^2}\frac{1}{n^{3/2}}.$$

Siccome

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty,$$

essendo $3/2 > 1$, allora dal Teorema del confronto la serie data converge.

Esercizio 4.9. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$, con $k \neq 0$, studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{|n-x|}{k}}.$$

Soluzione. La serie è a termini positivi e possiamo dunque usare il Criterio della Radice. Sia
$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{e}^{-\frac{|n-x|}{k}}} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-\frac{|n-x|}{nk}}.$$
Osserviamo che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|n-x|}{nk} = \lim_{n\to\infty} \frac{|1-x/n|}{k} = \frac{1}{k},$$
e quindi
$$L = \mathrm{e}^{-1/k}.$$

Ci sono due casi:

1) $L < 1$. In questo caso la serie converge. Precisamente:
$$L < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-1/k} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{k} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad k > 0.$$

2) $L > 1$. In questo caso la serie diverge. Precisamente:
$$L > 1 \quad \Leftrightarrow \quad k < 0.$$

Il caso $L = 1$ non si presenta. Dunque la serie converge se e solo se $k > 0$ (indipendentemente da $x \in \mathbb{R}$).

5. Il numero e

Il numero e di Nepero si definisce come la somma della "serie esponenziale", che converge per il Criterio del rapporto:
$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$
Il seguente teorema, dove si prova una definizione alternativa del numero e, è utile per risolvere le forme indeterminata del tipo $[1^\infty]$.

Teorema 5.1. Il seguente limite esiste finito e inoltre
$$\lim_{n\to\infty} \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}. \tag{5.13}$$

Dim. Proveremo che la successione
$$a_n = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$
è crescente e superiormente limitata. Dalla Proposizione 3.2 segue l'esistenza finita del limite (5.13).

Dalla formula del binomio di Newton si ottiene
$$a_n = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\frac{1}{k!}, \tag{5.14}$$

e in modo analogo

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) \dots \Big(1 - \frac{k-1}{n+1}\Big) \frac{1}{k!}.$$

Dalle disuguaglianze

$$\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) < \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big), \dots, \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) < \Big(1 - \frac{k-1}{n+1}\Big),$$

per $k = 0, 1, \dots, n$, segue che $a_n < a_{n+1}$. Questo prova che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente. Siccome

$$\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) < 1, \dots, \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) < 1,$$

dall'identità (5.14) si trova anche la maggiorazione

$$a_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \mathrm{e}. \tag{5.15}$$

Questo prova che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è superiormente limitata. Dunque, esiste finito il limite e si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \mathrm{e}.$$

Vogliamo provare la disuguaglianza opposta.

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ numeri naturali tali che $m \leq n$. Allora, ripartendo dall'identità (5.14), si trova:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \dots \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \frac{1}{k!} \\ &\geq \sum_{k=0}^{m} \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \dots \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

In questa disuguaglianza passiamo al limite per $n \to \infty$ e otteniamo la disuguaglianza

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!},$$

che a questo punto vale per ogni $m \in \mathbb{N}$. Passando ora al limite per $m \to \infty$ si trova

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

□

Osservazione 5.2. Il Teorema 5.1 si può generalizzare nel seguente modo. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n = \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{5.16}$$

Osservazione 5.3. Il numero di Nepero e verifica

$$\mathrm{e} > 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 2 + \frac{2}{3}.$$

Per ottenere una stima dall'alto si può usare la seguente disuguaglianza, che non dimostriamo,

$$\mathrm{e} < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \frac{n}{n!(n-1)},$$

che con $n = 4$ fornisce

$$\mathrm{e} < 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{18} < 3.$$

6. Serie a segno alterno. Criterio di Leibniz

Per questa parte si vedano gli appunti manoscritti in rete.

7. Convergenza assoluta

In questa sezione illustriamo il Criterio della convergenza assoluta, che fornisce una condizione sufficiente per la convergenza di serie con termine generale non necessariamente di segno costante.

DEFINIZIONE 7.1. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Diciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge *assolutamente* se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

TEOREMA 7.2. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente allora converge anche semplicemente ed inoltre

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{7.17}$$

DIM. Definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ la parte positiva e la parte negativa di a_n nel seguente modo

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \min\{a_n, 0\}.$$

Le successioni $(a_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(a_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ verificano le seguenti proprietà: i) $a_n^+ \geq 0$ e $a_n^- \leq 0$; ii) $a_n = a_n^+ + a_n^-$; iii) $|a_n| = a_n^+ - a_n^-$; iv) $a_n^+, -a_n^- \leq |a_n|$. Dal teorema del confronto abbiamo

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty, \quad 0 \leq -\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Dalle identità

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k^+ + a_k^-) = \sum_{k=1}^{n} a_k^+ + \sum_{k=1}^{n} a_k^-$$

segue allora anche l'esistenza finita del limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-.$$

Infine, dalla disuguaglianza

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k\Big| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

segue la tesi (7.17). Questo termina la prova. □

8. Esercizi svolti

ESERCIZIO 8.1. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{\sin\Big(\frac{1}{n+1}\Big)}(-1)^n.$$

Soluzione. Abbiamo

$$a_n = \sqrt[3]{\sin\Big(\frac{1}{n+1}\Big)} \geq 0,$$

e quindi siamo in presenza di una serie a segno alterno. Verifichiamo le ipotesi del Criterio di Leibniz:

1) La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima. Infatti:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\sin\Big(\frac{1}{n+1}\Big)} = \sqrt[3]{\lim_{n\to\infty} \sin\Big(\frac{1}{n+1}\Big)} = \sqrt[3]{\sin\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\Big)} = 0.$$
Abbiamo usato il fatto che la radice cubica e il seno sono funzioni continue.
2) La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente. Dobbiamo controllare che
$$a_{n+1} \leq a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Osserviamo che la funzione $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ è crescente. Inoltre, sull'intervallo $[0, \pi/2]$ la funzione $x \mapsto \sin x$, $x \in [0, \pi/2]$, è crescente. Di conseguenza, la funzione composta
$$f(x) = \sqrt[3]{\sin x}, \quad x \in [0, \pi/2],$$
è (strettamente) crescente. Deduciamo che
$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{\sin\Big(\frac{1}{n+1}\Big)} < \sqrt[3]{\sin\Big(\frac{1}{n}\Big)},$$
e quindi $a_{n+1} < a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per il Criterio di Leibniz la serie data converge.

ESERCIZIO 8.2. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{5^n \log(n+1)}(x^2 - 2x)^n.$$

Soluzione. La serie non è a termini positivi. Iniziamo a studiare la convergenza assoluta. Detto

$$a_n(x) = \frac{(-4)^n}{5^n \log(n+1)}(x^2 - 2x)^n,$$

studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$$

con il Criterio della Radice. Dobbiamo calcolare il seguente limite:

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{5\sqrt{\log(n+1)}}|x^2 - 2x|.$$

Per confronto
$$\sqrt[n]{\log 2} \leq \sqrt[n]{\log(n+1)} \leq \sqrt[n]{n},$$
e siccome
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log 2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$
dal Teorema del Confronto deduciamo che
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log(n+1)} = 1,$$
e dunque
$$L(x) = \frac{4}{5}|x^2 - 2x|.$$

Dal Criterio della Radice si ottengono le seguenti conclusioni:

1) $L(x) < 1$ implica che la serie converge assolutamente.
2) $L(x) > 1$ implica che la serie non converge assolutamente. Di più, si ha $\lim_{n\to\infty} |a_n(x)| = \infty$ e quindi il termine generale non è infinitesimo. Dunque, nel caso $L(x) > 1$ si ha
$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) \neq 0,$$
e quindi non c'è nemmeno convergenza semplice della serie.

Risolviamo la disequazione
$$L(x) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{5}|x^2 - 2x| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x^2 - 2x| < \frac{5}{4}.$$
La disequazione con valore assoluto è equivalente al sistema
$$\begin{cases} x^2 - 2x < \frac{5}{4} \\ x^2 - 2x > -\frac{5}{4} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 2x - \frac{5}{4} < 0 \\ x^2 - 2x + \frac{5}{4} > 0. \end{cases}$$
Le radici del polinomio $x^2 - 2x - 5/4 = 0$ sono
$$x_{\pm} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 5/4}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{5}{4}} = 1 \pm \frac{3}{2}.$$
Dunque si ha
$$x^2 - 2x - \frac{5}{4} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}.$$

L'equazione $x^2 - 2x + \frac{5}{4} = 0$ non ha radici reali. Dunque $x^2 - 2x + \frac{5}{4} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. La conclusione è che:
$$L(x) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x^2 - 2x| < \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}.$$
Per tali valori della x la serie converge assolutamente e quindi semplicemente. Analogamente, si ha
$$L(x) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < -\frac{1}{2} \quad \text{oppure} \quad x > \frac{5}{2}.$$
Per tali valori della x la serie non converge (nè assolutamente nè semplicemente) in quanto il termine generale non è infinitesimo.

Rimane da discutere il caso:
$$L(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x^2 - 2x| = \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \quad \text{oppure} \quad x = \frac{5}{2}.$$

In entrambi i casi si ha $x^2 - 2x = \frac{5}{4}$, e quindi la serie iniziale diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+1)}. \tag{8.18}$$

Questa serie converge (semplicemente) per il Criterio di Leibniz. Infatti, la successione

$$a_n = \frac{1}{\log(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

verifica:

1) È infinitesima:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = 0.$$

2) È decrescente:

$$\begin{aligned} a_{n+1} \le a_n \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\log(n+2)} \le \frac{1}{\log(n+1)} \\ &\Leftrightarrow \quad \log(n+1) \le \log(n+2) \\ &\Leftrightarrow \quad n+1 \le n+2 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \le 2. \end{aligned}$$

Proviamo che la serie (8.18) non converge assolutamente, ovvero:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = \infty.$$

Lo proviamo per confronto partendo dalla disuguaglianza

$$\log(n+1) \le n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\log(n+1)} \ge \frac{1}{n},$$

e dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \ge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Esercizio 8.3. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(\sin(\sin n)\big)^n.$$

Soluzione. Osserviamo che $-1 \le \sin n \le 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Di conseguenza si ha:

$$|\sin(\sin n)| \le \sin 1 = q < 1.$$

Per confronto con la serie geometrica di ragione $q < 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sin(\sin n)|^n \le \sum_{n=1}^{\infty} q^n < \infty.$$

La serie data converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

Esercizio 8.4. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Soluzione. Il termine generale della serie

$$a_n = \frac{n!}{n^n} > 0$$

è positivo e dunque possiamo utilizzare il Criterio del Rapporto. Avremo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1,$$

in quanto $\mathrm{e} > 1$. Per il Criterio del Rapporto la serie converge.

CHAPTER 5

Funzioni di variabile reale

1. Dominio, immagine, funzioni pari e dispari, sup e max

1.1. Funzione. Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ insiemi. Una funzione

$$f : A \to B$$

è un'applicazione che ad ogni elemento $x \in A$ associa un univocamente determinato elemento $f(x) \in B$. Diremo che:
i) $A = D(f)$ è il *dominio* di f;
ii) B è il *codominio* di f.

1.2. Immagine. L'insieme

$$\begin{aligned} f(A) &= \big\{ f(x) \in B : x \in A \big\} \\ &= \big\{ y \in B : \text{ esiste } x \in A \text{ tale che } f(x) = y \big\} \end{aligned}$$

si chiama *immagine* di A rispetto ad f. In generale l'immagine è un sottoinsieme stretto del codominio.

1.3. Grafico. Il grafico di f è il sottoinsieme del piano cartesiano

$$\mathrm{gr}(f) = \big\{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in A = D(f) \big\}.$$

Disegno

1.4. Funzioni pari e dispari. Diciamo che un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è simmetrico se

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad -x \in A.$$

Diremo che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è *pari* se

$$f(x) = f(-x) \quad \text{per ogni } x \in A.$$

Diremo che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è *dispari* se

$$f(x) = -f(-x) \quad \text{per ogni } x \in A.$$

Esempio 1.1. 1) La funzione $f(x) = \dfrac{x \sin x}{1 + x^2}$, definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è pari:

$$f(-x) = \frac{-x \sin(-x)}{1 + (-x)^2} = \frac{x \sin(x)}{1 + x^2} = f(x).$$

2) La funzione $f(x) = \dfrac{x^3 \cos x}{\log(2 + |x|)}$, definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è dispari:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 \cos(-x)}{\log(2 + |-x|)} = -\frac{x^3 \cos(x)}{\log(2 + |x|)} = -f(x).$$

1.5. Estremo superiore e inferiore. Massimo e minimo. Definiamo ora l'estremo superiore e inferiore di una funzione.

Definizione 1.2. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Definiamo l'*estremo superiore* di f su A:

$$\sup_A f = \sup_{x \in A} f(x) = \sup\{f(x) \in \mathbb{R} : x \in A\}.$$

Definiamo l'*estremo inferiore* di f su A:

$$\inf_A f = \inf_{x \in A} f(x) = \inf\{f(x) \in \mathbb{R} : x \in A\}.$$

Infine, diremo che f è limitata se

$$\sup_A f < \infty \quad \text{e} \quad \inf_A f > -\infty.$$

Osservazione 1.3. Si ha $L = \sup_A f \in \mathbb{R}$ se e solo se:
i) $f(x) \le L$ per ogni $x \in A$;
ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) > L - \varepsilon$.

Definizione 1.4. Se esiste un punto $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = \sup_A f$ scriveremo

$$\sup_A f = \max_A f,$$

e diremo che x_0 è un *punto di massimo* di f su A.
Se esiste un punto $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = \inf_A f$ scriveremo

$$\inf_A f = \min_A f,$$

e diremo che x_0 è un *punto di minimo* di f su A.

Esercizio 1.1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Calcolare $\sup_A f$, $\inf_A f$ ed $f(A) \subset \mathbb{R}$.

Soluzione. Osserviamo che la funzione è pari. Inoltre si ha $f(x) \ge 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed $f(0) = 0$. Segue che

$$\inf_A f = \min_A f = 0,$$

con $0 \in \mathbb{R}$ unico punto di minimo (assoluto).
Affermiamo che

$$\sup_{\mathbb{R}} f = 1.$$

Da un lato si ha

$$f(x) \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{1+x^2} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \le 1 + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le 1,$$

e l'ultima disuguaglianza è verificata. Sia ora $\varepsilon > 0$ e cerchiamo un punto $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) > 1 - \varepsilon$, ovvero

$$\frac{x^2}{1+x^2} > 1 - \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x^2 > 1 - \varepsilon + (1-\varepsilon)x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon x^2 > 1 - \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x^2 > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon},$$

e l'ultima disequazione ha soluzioni $|x| > \sqrt{(1-\varepsilon)/\varepsilon}$.

Dai conti precedenti segue anche che $f(x) \neq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi f non assume valore massimo. Un grafico approssimativo di f è il seguente:

Disegno

$\square$

2. Funzioni iniettive, suriettive, monotone. Funzione inversa e composta

2.1. Funzione inversa.

Definizione 2.1. Sia $f : A \to B$ una funzione. Diremo che:

i) f è iniettiva (1-1) se: $f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad x = y$;
ii) f è suriettiva (su) se: per ogni $y \in B$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$;
iii) f è biiettiva se f è $1-1$ e su.

Definizione 2.2. Sia $f : A \to B$ una funzione $1-1$ e su. Possiamo definire la funzione inversa $f^{-1} : B \to A$ in questo modo:

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y.$$

In altri termini, f^{-1} associa all'elemento $y \in B$ quel punto $x \in A$, che esiste ed è unico, tale che $f(x) = y$.

Il grafico $\mathrm{gr}(f^{-1})$ si ottiene dal grafico $\mathrm{gr}(f)$ con una riflessione rispetto alla bisettrice del primo-terzo quadrante $y = x$:

Disegno

Esercizio 2.1. Sia $f : [0,1] \to [0,1]$ la funzione

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad x \in [0,1].$$

1) Provare che f è $1-1$ e su;
2) Calcolare la funzione inversa $f^{-1} : [0,1] \to [0,1]$.

Soluzione. 1) Proviamo che f è iniettiva. Abbiamo la seguente catena di equivalenze

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2y}{1+y^2} \\ &\Leftrightarrow \quad x + xy^2 = y + yx^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x - y + xy^2 - yx^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x - y + xy(x-y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-y)(1-xy) = 0. \end{aligned}$$

Deduciamo che

$$f(x) = f(y) \quad \Leftrightarrow \quad x - y = 0 \text{ oppure } 1 - xy = 0.$$

L'equazione $xy = 1$ con $x, y \in [0,1]$ è verificata solo per $x = y = 1$. Quindi, in ogni caso si deduce che $x = y$.

Proviamo la suriettività. Dato $y \in [0,1]$ cerchiamo $x \in [0,1]$ tale che

$$\begin{aligned} f(x) = y \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2x}{1+x^2} = y \\ &\Leftrightarrow \quad 2x = y + yx^2 \\ &\Leftrightarrow \quad yx^2 - 2x + y = 0. \end{aligned}$$

Se $y = 0$ c'è la sola soluzione $y = 0$. Se $y \in (0,1]$, risolviamo in x l'equazione di secondo grado e troviamo le soluzioni

$$x_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y}.$$

Abbiamo $x_\pm > 0$. Dobbiamo scegliere la soluzione che verifica $x_\pm \leq 1$. Esaminiamo x_+:

$$\begin{aligned} x_+ \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 + \sqrt{1-y^2} \leq y \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1-y^2} \leq y - 1. \end{aligned}$$

L'ultima disuguaglianza non è verificata in quanto $y - 1 \leq 0$.

Esaminiamo x_-:

$$\begin{aligned} x_- \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - \sqrt{1-y^2} \leq y \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - y \leq \sqrt{1-y^2} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - 2y + y^2 \leq 1 - y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad y^2 - y \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq y \leq 1, \end{aligned}$$

e l'ultima disuguaglianza è verificata.

2) La funzione inversa è data da x_- come funzione di y e precisamente:

$$f^{-1}(y) = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1 + \sqrt{1-y^2}}, \quad y \in [0,1].$$

Ecco un grafico della situazione:

Disegno

2.2. Funzioni crescenti e decrescenti.

Definizione 2.3. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice *crescente su* A se

$$x_1 \leq x_2 \text{ con } x_1, x_2 \in A \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

La funzione si dice strettamente crescente se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$.

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice *decrescente su* A se

$$x_1 \leq x_2 \text{ con } x_1, x_2 \in A \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

La funzione si dice strettamente decrescente se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2$.

Le funzioni crescenti oppure decrescenti nel loro dominio si dicono monotòne.

Esempio 2.4. Siano $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = 1/x$. La funzione f NON è decrescente nel suo dominio A. Infatti, si ha $-1 < 1$ mentre $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$.

Tuttavia, f è strettamente decrescente su ciascuno dei due intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$, separatamente.

Disegno

Esempio 2.5. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione $f(x) = x^n$ è strettamente crescente su $[0, \infty)$.

Proviamo che per ogni $x \geq 0$ e per ogni $h > 0$ si ha $f(x + h) > f(x)$, ovvero:

$$(x + h)^n > x^n.$$

Partiamo dalla formula del Binomio di Newton

$$(x + h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} = x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} + h^n > x^n,$$

essendo $h^n > 0$ e la sommatoria non negativa.

Osservazione 2.6. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora si ha:

$$f \text{ strettamente monotòna su } A \quad \Rightarrow \quad f \text{ è } 1-1 \text{ su } A.$$

Non vale tuttavia l'implicazione opposta. Una funzione può essere iniettiva senza essere monotòna. Si consideri ad esempio la funzione $f : [0, 1] \to [0, 1]$ il cui grafico è descritto nella seguente figura:

Disegno

2.3. Funzione composta.

Definizione 2.7 (Funzione composta). Siano $A, B, C \subset \mathbb{R}$ e siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni. Si definisce la *funzione composta* $g \circ f : A \to C$ ponendo

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \quad x \in A.$$

Disegno

Esempio 2.8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x^4$ e sia $g : [-1, \infty) \to \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = \sqrt{1 + x}$. Osserviamo che $f(\mathbb{R}) = [0, \infty) \subset D(g) = [-1, \infty)$ e quindi è ben definita la funzione composta $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{1 + f(x)} = \sqrt{1 + x^4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Osservazione 2.9. Lasciamo al lettore il compito di verificare le seguenti affermazioni:

i) f crescente e g crescente $\quad \Rightarrow \quad g \circ f$ crescente;
ii) f crescente e g decrescente $\quad \Rightarrow \quad g \circ f$ decrescente;
iii) f decrescente e g decrescente $\quad \Rightarrow \quad g \circ f$ crescente.

Osservazione 2.10. Sia $f : A \to B$ una funzione iniettiva e suriettiva. Allora:

i) $f^{-1} \circ f =$Identità su A;
ii) $f \circ f^{-1} =$Identità su B.

3. Funzioni trigonometriche e loro inverse

3.1. Funzioni seno e coseno. Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ la circonferenza unitaria centrata nell'origine. Sia $P \in C$ un punto sulla circonferenza, sia $A = (1,0)$ e misuriamo l'angolo $\widehat{P0A}$ in radianti. Questo significa che l'angolo misura la lunghezza dell'arco $\widehat{AP}$. Sia $x \in \mathbb{R}$ questa lunghezza misurata con segno positivo se si va da A a P in senso antiorario (contiamo anche il numero dei giri che facciamo). Si veda la figura sotto:

Disegno

Il punto H è la proiezione sull'asse delle x del punto P.

Definiamo le funzioni seno e coseno, $\sin, \cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ nel seguente modo:

$$\sin x = \overline{PH} \quad \text{lunghezza con segno del segmento } PH,$$

$$\cos x = \overline{OH} \quad \text{lunghezza con segno del segmento } OH,$$

Le funzioni sono 2π-periodiche. La funzione seno è dispari, la funzione coseno è pari. I loro grafici sono tratteggiati sotto:

Disegno

Disegno

3.2. Funzioni arcoseno e arcocoseno. Osserviamo che la restrizione della funzione seno

$$\sin : \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] \to [-1,1]$$

è iniettiva (essendo strettamente crescente) e suriettiva. La restrizione della funzione coseno

$$\cos : \Big[0, \pi\Big] \to [-1,1]$$

è iniettiva (essendo strettamente decrescente) e suriettiva.

Possiamo definire dunque le funzioni inverse arcoseno e arcocoseno:

$$\arcsin : [-1,1] \to \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big]$$

Disegno

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

Chiaramente $D(\arcsin) = [-1,1]$ e $D(\arccos) = [-1,1]$.

Disegno

Esercizio 3.1. Determinare il dominio e disegnare il grafico della funzione $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

Soluzione. Ricordiamo che $D(\arcsin) = [-1,1]$ e che $\sin x \in [-1,1]$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque, la funzione composta f è sempre ben definita, ovvero $D(f) = \mathbb{R}$. Inoltre si ha

$$-\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Osserviamo infine che, essendo sin 2π-periodica, anche f è 2π-periodica.

Se $x \in \big[-\pi/2, \pi/2\big]$ allora si ha

$$f(x) = \arcsin(\sin x) = x$$

in quanto arcsin è la funzione inversa di $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$.

Disegno

Se riusciamo a capire come è fatta f nell'intervallo $\big[\pi/2, 3\pi/2\big]$ avremo finito, visto che f è 2π-periodica.

Partiamo da questa identità relativa alla funzione seno:

$$\sin(x) = \sin(\pi - x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Se ora prendiamo $x \in \big[\pi/2, 3\pi/2\big]$ allora si avrà $\pi - x \in \big[-\pi/2, \pi/2\big]$ e su quest'ultimo intervallo arcsin inverte sin. Dunque, per tali x si ha

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x, \quad x \in \big[\pi/2, 3\pi/2\big].$$

In conclusione, il grafico di f è il seguente:

Disegno

3.3. Identità trigonometriche. Richiamiamo, senza dimostrazione, alcune identità trigonometriche notevoli. Nel seguito, $x, y \in \mathbb{R}$ sono generici numeri reali.

1) Identità trigonometrica fondamentale:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

2) Formule di addizione:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

3) Formule di duplicazione:

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos y,$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

4) Formule di bisezione:

$$\sin\Big(\frac{x}{2}\Big) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}},$$
$$\cos\Big(\frac{x}{2}\Big) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

3.4. Funzioni tangente e arcotangente. Per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ abbiamo $\cos x \neq 0$ e quindi possiamo definire la funzione tangente

$$\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

La funzione tangente è π-periodica ed è dispari. Il suo grafico è il seguente:

Disegno

Osserviamo che la restrizione della tangente

$$\mathrm{tg} : \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) \to \mathbb{R}$$

è iniettiva (essendo strettamente crescente) e suriettiva. Possiamo dunque definire la funzione inversa

$$\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \to \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big).$$

Il suo grafico è il seguente:

Disegno

4. Funzioni iperboliche

La funzione esponenziale $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \in \mathbb{R}$, ha il seguente grafico:

Disegno

Definiamo le funzioni senoiperbolico e cosenoiperbolico, $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{dispari}, \\ \cosh x &= \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{pari}. \end{aligned}$$

I grafici sono rappresentati nella seguente figura:

Disegno

Si osservi che $\cosh x \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Senoiperbolico e cosenoiperbolico verificano la seguente identità fondamentale, che giustifica il loro nome:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 = 1 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \Big(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\Big)^2 \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 2}{4} - \frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} - 2}{4} = 1. \end{aligned}$$

In altri termini, la curva $t \mapsto (\cosh t, \sinh t) \in \mathbb{R}^2$ descrive, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, il ramo destro dell'iperbole $x^2 - y^2 = 1$.

Disegno

5. Potenze e radici

5.1. Costruzione. Siano $x \in \mathbb{R}$ con $x \geq 0$ una "base" e $\alpha \in \mathbb{R}$ un esponente. In questa sezione vogliamo definire la potenza

$$x^\alpha \in \mathbb{R}.$$

Quando $\alpha \leq 0$ richiederemo che la base sia strettamente positiva, $x > 0$. La definizione della potenza avverrà per passi, a partire dalle situazioni più semplici.

Osservazione 5.1. Per un esponente generale α, la definizione della potenza x^α è possibile solo per $x \geq 0$. In casi speciali, tuttavia, la potenza è definita anche per $x < 0$. Ad esempio, la radice cubica ($\alpha = 1/3$)

$$x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$$

è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Disegno

Iniziamo la costruzione.

Convenzione. Poniamo $x^0 = 1$ per ogni $x > 0$. Il simbolo 0^0 NON è definito.

Nel seguito è $\alpha \neq 0$.

1^o *Passo:* $\alpha = n \in \mathbb{N}$ è un numero naturale. Definiamo in questo caso:

$$x^n = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ volte}}.$$

2^o *Passo:* $\alpha = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$. La funzione *potenza n-esima* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$

$$f(y) = y^n, \quad y \geq 0,$$

è iniettiva (essendo strettamente crescente, si veda l'Esempio 2.5) e suriettiva. La prova della suriettività richiede il Teorema dei valori intermedi, che sarà visto prossimamente. Quindi esiste la funzione inversa, la *radice n-esima*, $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Definiamo allora

$$x^{1/n} = f^{-1}(x), \quad x \geq 0.$$

In altri termini: la radice n-esima è la funzione inversa della potenza n-esima. Osserviamo che anche f^{-1} è una funzione strettamente crescente:

Disegno

Notazione. La radice n-esima si indica anche nel seguente modo: $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

3^o *Passo:* $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ è un numero razionale con $p, q \in N$, $p, q \geq 1$. In questo caso, definiamo

$$x^{p/q} = (x^{1/q})^p,$$

dove $x^{1/q}$ è stato già definito al 2^0 Passo.

Osservazione 5.2.

1) $x > 1 \quad \Rightarrow \quad$ la funzione $\alpha \mapsto x^\alpha$ è strettamente crescente in $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$.
2) $0 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad$ la funzione $\alpha \mapsto x^\alpha$ è strettamente decrescente in $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$.

4^o *Passo:* Definiamo la potenza x^α quando $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.
Se $x = 1$ definiamo $1^\alpha = 1$.
Se $x > 1$ definiamo:

$$\begin{aligned} x^\alpha &= \sup \left\{ x^\beta \in \mathbb{R} : \beta \in \mathbb{Q},\, 0 < \beta < \alpha \right\} \\ &= \lim_{\substack{\beta \to \alpha \\ \beta < \alpha}} x^\beta. \end{aligned}$$

Se $0 < x < 1$ definiamo:

$$\begin{aligned} x^\alpha &= \inf\big\{x^\beta \in \mathbb{R} : \beta \in \mathbb{Q},\, 0 < \beta < \alpha\big\} \\ &= \lim_{\substack{\beta\to\alpha \\ \beta<\alpha}} x^\beta. \end{aligned}$$

Gli estremi superiore e inferiore considerati sopra esistono per l'Assioma di Completezza. Abbiamo usato il linguaggio dei limiti, che non è stato ancora introdotto. Ma lo si può evitare.

Riportiamo sotto il grafico della funzione x^α quando $\alpha > 0$, nei tre casi modello $\alpha = 1/2, 1, 2$:

Disegno

Si noti che quando $x > 1$ si hanno le disuguaglianze $\sqrt{x} < x < x^2$. Quando $0 < x < 1$, le disuguaglianze si rovesciano.

5^o *Passo:* Per $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha < 0$ definiamo per ogni $x > 0$:

$$x^\alpha = \Big(\frac{1}{x}\Big)^{-\alpha}.$$

Con questo abbiamo terminato la costruzione di tutte le potenze.

Per completezza e chiarezza, riportiamo sotto il grafico della funzione $(1/x)^\alpha = 1/x^\alpha$ con $\alpha > 0$, nei tre casi modello $\alpha = 1/2, 1, 2$:

Disegno

5.2. Proprietà delle potenze.

Teorema 5.3 (Proprietà aritmetiche delle potenze). Siano $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$ ed $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora:

1) $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$;
2) $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$;
3) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$;
4) $x^{-\alpha} = 1/x^\alpha$.

La dimostrazione del Teorema è elementare quando $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ (1^o Passo). Omettiamo la dimostrazione nel caso generale.

Teorema 5.4 (Proprietà di monotonia delle potenze). Siano $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$ ed $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora:

1) $0 \le x < y$ e $\alpha > 0 \quad\Rightarrow\quad x^\alpha < y^\alpha$ (funzione crescente della base);
2) $0 \le x < y$ e $\alpha < 0 \quad\Rightarrow\quad x^\alpha > y^\alpha$ (funzione decrescente della base);
3) $x > 1$ e $\alpha < \beta \quad\Rightarrow\quad x^\alpha < x^\beta$ (funzione crescente dell'esponente);
4) $0 < x < 1$ e $\alpha < \beta \quad\Rightarrow\quad x^\alpha > x^\beta$ (funzione decrescente dell'esponente).

Di nuovo, la dimostrazione del Teorema è elementare quando $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Omettiamo la dimostrazione nel caso generale.

6. Esponenziali e logaritmi

6.1. Costruzione. Sia $a > 0$ un numero reale fissato. La funzione $f_a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$

$$f_a(x) = a^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

si chiama *funzione esponenziale* di base a.

Per le affermazioni 3) e 4) del Teorema 5.4, si ha:

$$\begin{aligned} a > 1 \quad &\Rightarrow \quad f_a \text{ è strettamente crescente,} \\ 0 < a < 1 \quad &\Rightarrow \quad f_a \text{ è strettamente decrescente.} \end{aligned}$$

Ecco un grafico con i due andamenti:

Disegno

Per $a > 0$ con $a \neq 1$ possiamo definire la funzione inversa $f_a^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, che si chiama *logaritmo in base a*:

$$\log_a(x) = f_a^{-1}(x), \quad x > 0.$$

Useremo la seguente notazione: $\log_{\mathrm{e}}(x) = \log(x) = \ln(x)$, logaritmo naturale.

L'andamento della funzione logaritmo è descritto nella seguente figura:

Disegno

6.2. Proprietà dei logaritmi.

Teorema 6.1 (Proprietà dei logaritmi). Per tutti i valori ammissibili di a, b, x, y e β si ha:

1) $a^{\log_a(x)} = x$ e $\log_a(a^x) = x$; in particolare, $\log_a(1) = 0$;
2) $\log_a(x^\beta) = \beta \log_a(x)$;
3) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ e $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$;
4) $\log_a(x) = \log_a(b) \log_b(x)$ (formula del cambio di base).

Dim. L'affermazione 1) esprime il fatto che logaritmo ed esponenziale sono funzioni l'una inversa dell'altra.

Verifichiamo 2):

$$\log_a(x^\beta) = \beta \log_a(x) \quad \Leftrightarrow \quad a^{\log_a(x^\beta)} = a^{\beta \log_a(x)} = [\text{Proprietà potenze}] = \left(a^{\log_a(x)}\right)^\beta = x^\beta,$$

e quindi otteniamo l'identità valida $x^\beta = x^\beta$.

Verifichiamo la prima affermazione in 3):

$$\begin{aligned} \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad &\Leftrightarrow \quad a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a(x) + \log_a(y)} \\ &\Leftrightarrow \quad xy = a^{\log_a(x)} a^{\log_a(y)} \quad \Leftrightarrow \quad xy = xy. \end{aligned}$$

Anche la verifica di 4) è elementare:

$$\log_a(b) \log_b(x) = \log_a\left(b^{\log_b(x)}\right) = \log_a(x).$$

$\square$

7. Dominio di funzione

In questa sezione vediamo un esempio sulla corretta individuazione del dominio di una funzione con potenze e logaritmi.

Esercizio 7.1. Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \log\Big(\Big(\frac{x}{x-1}\Big)^x - 1\Big).$$

Soluzione. Devono essere verificate tutte e tre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} x \neq 1 & \text{denominatore diverso da zero} \\ \dfrac{x}{x-1} \geq 0 \text{ e } x \neq 0 & \text{potenza ben definita} \\ \Big(\dfrac{x}{x-1}\Big)^x - 1 > 0 & \text{argomento del logaritmo positivo.} \end{cases}$$

Iniziamo a studiare la disequazione

$$\frac{x}{x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

Dunque, per $x \in [0, 1]$ la funzione non è definita.

Studiamo la terza disequazione

$$\Big(\frac{x}{x-1}\Big)^x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log\Big(\frac{x}{x-1}\Big)^x > \log 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \log\Big(\frac{x}{x-1}\Big) > 0.$$

Studiamo il segno del fattore non banale del prodotto:

$$\begin{aligned} \log\Big(\frac{x}{x-1}\Big) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{x-1} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{x-1} - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1. \end{aligned}$$

Dunque, la terza disequazione è verificata nei seguenti casi:

Disegno

La conclusione è che il dominio di f è:

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

CHAPTER 6

Limiti di funzione

1. Definizione di limite

Dati un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ ed un numero positivo $\delta > 0$ ricordiamo che

$$I_\delta(x_0) = \big\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\big\}$$

è l'*intorno di x_0 con raggio $\delta > 0$*.

DEFINIZIONE 1.1 (Punto di accumulazione). Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice *punto di accumulazione* di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se

$$A \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

per ogni $\delta > 0$.

Diamo ora la definizione di limite (finito) di una funzione quando la variabile x si avvicina ad un punto di accumulazione x_0 del dominio.

DEFINIZIONE 1.2 (Limite). Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f tende al limite $L \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$ ("per x che tende a x_0") se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$0 < |x - x_0| < \delta,\ x \in A, \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Scriveremo in questo caso

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

OSSERVAZIONE 1.3. Osserviamo che la funzione f non è necessariamente definita nel punto x_0, che potrebbe essere fuori dal dominio della funzione.

PROPOSIZIONE 1.4. Se f ha limite per $x \to x_0$, allora questo limite è unico.

DIM. La prova è omessa, essendo analoga a quella per le successioni. □

PROPOSIZIONE 1.5 (Permanenza del segno). Se esiste positivo il limite

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x) > 0,$$

allora esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in I_\delta(x_0) \cap D(f)$, con $x \neq x_0$.

DIM. La prova è omessa, essendo analoga a quella per le successioni. La dimostrazione si trova nei files on line sulle lezioni in classe. □

ESEMPIO 1.6. La funzione $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sin\Big(\frac{1}{x}\Big), \quad x > 0,$$

non ha limite per $x \to 0$.

Disegno

Ora definiamo la nozione di limite infinito per $x \to x_0$.

DEFINIZIONE 1.7 (Limite infinito). Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$0 < |x - x_0| < \delta, \ x \in A, \quad \Rightarrow \quad f(x) > M.$$

ESERCIZIO 1.1. Usando la definizione provare che

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Svolgimento. Fissiamo $M > 0$ e cerchiamo $\delta > 0$ tale che valga l'implicazione

$$0 < |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > M. \tag{1.19}$$

Studiamo la seguente disequazione

$$f(x) > M \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x^2} > M \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < \frac{1}{M} \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Dunque, con la scelta $\delta = 1/\sqrt{M}$ è assicurata l'implicazione (1.19).

Ora definiamo la nozione di limite finito quando $x \to \infty$ ("x tende a più infinito").

DEFINIZIONE 1.8. Sia $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$, per qualche $a \in \mathbb{R}$, una funzione. Diciamo che f tende al limite $L \in \mathbb{R}$ per $x \to \infty$ e scriviamo

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che

$$x > M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

ESERCIZIO 1.1. Scrivere la definizione dei seguenti limiti:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$;
2) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$;
3) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$;
4) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$.

2. Calcolo dei limiti con la definizione

ESERCIZIO 2.1. Usando la definizione verificare che

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + 1}{1 + 2x} = 1.$$

Soluzione. Fissato $\varepsilon > 0$, cerchiamo $\delta > 0$ tale che valga la seguente implicazione:

$$0 < |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x+1}{1+2x} - 1\right| < \varepsilon. \tag{2.20}$$

Studiamo la seguente disequazione:

$$\left|\frac{x+1}{1+2x} - 1\right| = \left|\frac{x+1-1-2x}{1+2x}\right| = \left|\frac{x}{1+2x}\right| < \varepsilon. \tag{2.21}$$

Supponendo, come è lecito in questo caso, che $1+2x \neq 0$, la disequazione è equivalente a

$$x^2 < \varepsilon^2(1+4x^2+4x) \quad \Leftrightarrow \quad (1-4\varepsilon^2)x^2 - 4\varepsilon^2 x - \varepsilon^2 < 0.$$

Le radici del polinomio in x di grado 2 associato alla disequazione sono

$$x_\pm = \frac{2\varepsilon^2 \pm \varepsilon}{1-4\varepsilon^2}.$$

Qui e nel seguito possiamo supporre che $0 < \varepsilon < 1/2$. La disequazione precedente è verificata per $x_- < x < x_+$ e dunque la disequazione (2.21) è equivalente a

$$\left|\frac{x}{1+2x}\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\varepsilon^2 - \varepsilon}{1-4\varepsilon^2} < x < \frac{2\varepsilon^2 + \varepsilon}{1-4\varepsilon^2}$$

Con la scelta di δ

$$\delta = \min\left\{\frac{2\varepsilon^2 - \varepsilon}{1-4\varepsilon^2}, \frac{2\varepsilon^2 + \varepsilon}{1-4\varepsilon^2}\right\} = \frac{2\varepsilon^2 + \varepsilon}{1-4\varepsilon^2}$$

l'implicazione (2.20) è verificata.

Esercizio 2.2. Usando la definizione verificare che

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-1)^4} = \infty.$$

Soluzione. Fissato $M > 0$, cerchiamo $\delta > 0$ tale che valga la seguente implicazione:

$$0 < |x-1| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{(1-x)^4} > M. \tag{2.22}$$

Studiamo la seguente disequazione:

$$\frac{x}{(1-x)^4} > M \quad \Leftrightarrow \quad x > M(x-1)^4. \tag{2.23}$$

Non è possibile risolvere tale disequazione in modo esatto. Riduciamo la sua complessità nel seguente modo. Supponiamo che $0 < \delta \leq 1/2$. In questo caso si ha:

$$|x-1| < \delta \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} < x - 1 < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}.$$

Dunque, usando l'informazione $x > 1/2$ si ottiene

$$\frac{x}{(x-1)^4} > \frac{1}{2(x-1)^4}.$$

Risolviamo allora la disequazione semplificata

$$\frac{1}{2(x-1)^4} > M. \tag{2.24}$$

Chiaramente, per la proprietà transitiva, se x verifica la disequazione (2.24) allora verifica anche la disequazione (2.23). D'altra parte, si ha

$$\frac{1}{2(x-1)^4} > M \quad \Leftrightarrow \quad 1 > 2M(x-1)^4 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^4 < \frac{1}{2M} \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| < \frac{1}{\sqrt[4]{2M}}$$

Se ora scegliamo

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt[4]{2M}}\right\}$$

tutte le deduzioni fatte sono valide e si ottiene l'implicazione

$$0 < |x-1| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{(x-1)^4} > M.$$

3. Operazioni coi limiti

In questa sezione introduciamo vari strumenti per calcolare i limiti di funzione in modo più efficiente che non con la definizione.

TEOREMA 3.1. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione dell'insieme $A \subset \mathbb{R}$ e siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni. Supponiamo che esistano finiti i limiti

$$L = \lim_{x\to x_0} f(x) \ \in \mathbb{R},$$
$$M = \lim_{x\to x_0} g(x) \ \in \mathbb{R}.$$

Allora si ha:

1) $\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = L + M$;

2) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = LM$.

Inoltre, se $M \neq 0$ allora si ha anche:

3) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$.

DIM. Proviamo ad esempio 1). Fissato $\varepsilon > 0$ esistono $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tali che per ogni $x \in A$ si hanno le implicazioni

$$0 < |x-x_0| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$0 < |x-x_0| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Con la scelta $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se $x \in A$ verifica $|x - x_0| < \delta$ allora avremo:

$$|f(x) + g(x) - (L+M)| \le |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Omettiamo la prova di 2) e 3). □

OSSERVAZIONE 3.2.

(1) Il Teorema 3.1 vale anche con $\pm\infty$ al posto di x_0.

(2) Il punto 1) del Teorema 3.1 vale anche con $L = \pm\infty$ ed $M \in \mathbb{R}$, con la regola $\pm\infty + M = \pm\infty$.

(3) Il punto 2) del Teorema 3.1 vale anche con $L = \pm\infty$ ed $M \in \mathbb{R}$ tale che $M \neq 0$, con la regola:

$$\pm\infty \cdot M = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } M > 0, \\ \mp\infty & \text{se } M < 0. \end{cases}$$

(4) Se f è una funzione limitata e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0.$$

ESEMPIO 3.3 (Esempi fondamentali). I seguenti limiti sono basilari.
Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro fissato. Allora:

$$1)\ \lim_{x\to 0} |x|^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ \infty & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Osserviamo che quando $\alpha = 0$ NON si ha forma indeterminata $[0^0]$, perchè $|x|^0 = 1$ per ogni $x \neq 0$, e dunque il limite per $x \to 0$ è 1. Nella forma indeterminata $[0^0]$ si ha una base che tende ad 0 ed un esponente che tende a 0 senza essere già 0.

$$2)\ \lim_{x\to\infty} x^\alpha = \begin{cases} \infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Sia ora $a > 0$ una base fissata. Allora:

$$3)\ \lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Osserviamo che quando $a = 1$ NON si ha forma indeterminata $[1^\infty]$, perchè $1^x = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e dunque il limite per $x \to \infty$ è 1. Nella forma indeterminata $[1^\infty]$ si ha una base che tende ad 1 senza essere già 1 ed un esponente che tende a ∞.

Se, infine, si ha $a > 1$ allora:
4) $\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$ e $\lim_{x\to 0} \log_a x = -\infty$.

Omettiamo le dimostrazioni (elementari) di tali limiti fondamentali. Anche per i limiti di funzione può essere utile il teorema del confronto.

TEOREMA 3.4 (del confronto). Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione dell'insieme $A \subset \mathbb{R}$ e siano $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ tre funzioni tali che

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad x \in A.$$

Se esistono uguali i limiti

$$L = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x),$$

allora si ha anche

$$L = \lim_{x\to x_0} g(x).$$

DIM. La dimostrazione è omessa perchè è identica a quella per i limiti di successione. □

OSSERVAZIONE 3.5. Direttamente dalla definizione di limite segue questa doppia implicazione:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0.$$

Se il limite è 0 (e solo in questo caso) il limite non dipende dalla presenza o meno del valore assoluto.

4. Limiti trigonometrici

Teorema 4.1. Si hanno i seguenti limiti trigonometrici notevoli:

1) $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$;
2) $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$;
3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;

Dim. Partiamo dalla definizione geometrica di $\sin x$ e $\cos x$. Si osservi la seguente figura:

Figura

Una figura dettagliata si trova nei files on line delle lezioni. Per definizione, avremo:
$x = \widehat{PK}$ angolo in radianti
$\sin x = \overline{PH}$ lunghezza con segno
$\cos x = \overline{OH}$ lunghezza con segno
$\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \overline{QK}$ lunghezza con segno
Dalla figura sono chiare le seguenti inclusioni:

$$\widehat{POK} \subset \widehat{POK} \subset \widehat{QOK},$$

dove $\widehat{POK}$ e $\widehat{QOK}$ sono triangoli mentre $\widehat{POK}$ indica il settore circolare. Quindi si hanno le disuguaglianze delle aree

$$\mathrm{Area}(\widehat{POK}) \le \mathrm{Area}(\widehat{POK}) \le \mathrm{Area}(\widehat{QOK}).$$

Per $0 \le x < \pi/2$, la aree sono:

$$\mathrm{Area}(\widehat{POK}) = \frac{1}{2}\sin x, \quad \mathrm{Area}(\widehat{POK}) = \frac{1}{2}x, \quad \mathrm{Area}(\widehat{QOK}) = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\, x.$$

Deduciamo che per $0 \le x < \pi/2$ si hanno le disuguaglianze

$$\sin x \le x \le \mathrm{tg} x. \tag{4.25}$$

Di conseguenza, per $|x| < \pi/2$ avremo

$$|\sin x| \le |x|$$

e dal Teorema del Confronto segue che

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

Questo prova l'affermazione 1). Passiamo alla affermazione 2). Sempre per $|x| < \pi/2$ avremo

$$0 \le 1 - \cos x = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} \le \sin^2 x,$$

e dunque dal Teorema del Confronto deduciamo che

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x) = 0.$$

Infine, ripartendo dalla (4.25):

$$\sin x \le x \le \frac{\sin x}{\cos x} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1,$$

per il Teorema del Confronto deduciamo che
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$
$\square$

Esempio 4.2. Calcolare il seguente limite:
$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x(1-\cos x)}{x^3}.$$

Soluzione. Partiamo dalle identità:
$$\frac{\operatorname{tg}x(1-\cos x)}{x^3}=\frac{\sin x}{\cos x}\frac{1-\cos^2 x}{x^3(1+\cos x)}=\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^3.$$
Siccome
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}=\frac{1}{2}\quad\text{e}\quad \lim_{x\to 0}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^3=1,$$
deduciamo che $L=1/2$.

5. Forme indeterminate

Le forme indeterminate sono:
$$[\infty-\infty],\ \Big[\frac{\infty}{\infty}\Big],\ [1^\infty],\ [0\cdot\infty],\ \Big[\frac{0}{0}\Big],\ [0^0],\ [\infty^0].$$
Queste forme indeterminate possono essere trasformate le une nelle altre. In questa sezione, vogliamo sviluppare tecniche per risolvere la forma indeterminata $[\frac{\infty}{\infty}]$.

Partiamo dal seguente teorema sul confronto fra infiniti:

Teorema 5.1. Valgono i seguenti limiti:

1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^\beta}{a^x}=0$ per ogni $\beta>0$ e $a>1$.
2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha}=0$ per ogni $\alpha,\beta>0$ e $a>1$.

Dim. Premettiamo la seguente

Definizione 5.2. La *parte intera* di $x\in\mathbb{R}$ è il numero intero
$$[x]=\max\big\{n\in\mathbb{Z}:n\le x\big\}$$

La parte intera verifica le seguenti proprietà:
i) $[x]\le x<[x]+1$;
ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}[x]=\infty$ e quindi $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{[x]}=0$.

Proviamo l'affermazione 1) nel caso $\beta=1$. Sia $\sqrt{a}=1+h$ con $h>0$, in quanto $a>1$. Allora si ha
$$a^x=(\sqrt{a})^{2x}=[(1+h)^x]^2\ge\big[(1+h)^{[x]}\big]^2\ge[1+[x]h]^2,$$
dove abbiamo usato la disuguaglianza di Bernoulli, e di conseguenza
$$0<\frac{x}{a^x}\le\frac{[x]+1}{(1+[x]h)^2}=\frac{1}{[x]}\frac{1+1/[x]}{\big(1/[x]+h\big)^2}\to 0$$

per $x \to \infty$, e per il Teorema del Confronto si deduce che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{a^x} = 0.$$

Proviamo l'affermazione 2). Vogliamo calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha}.$$

Calcoliamo il limite con la seguente sostituzione

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad a^y = a^{\log_a x} = x,$$

e osserviamo che $x \to \infty$ se e solo se $y \to \infty$. Dunque, si ha

$$L = \lim_{y\to\infty} \frac{y^\beta}{(a^y)^\alpha} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^\beta}{(a^\alpha)^y} = 0,$$

in quanto $a^\alpha > 1$ essendo $a > 1$ ed $\alpha > 0$. □

Esercizio 5.1. Verificare che per ogni $\beta > 0$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+} x^\beta \log x = 0$$

Suggerimento: Sostituzione $y = -\log x$.

Esercizio 5.1. Calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{\log_2(\mathrm{e}^x + x^2)}{x + \sin x + \log_2 x}.$$

Soluzione. Abbiamo una forma indeterminata $[\frac{\infty}{\infty}]$. Dobbiamo individuare e fattorizzare ("estrarre") i contributi dominanti a numeratore e denominatore:

$$\begin{aligned}\frac{\log_2(\mathrm{e}^x + x^2)}{x + \sin x + \log_2 x} &= \frac{\log_2\left[\mathrm{e}^x\left(1 + \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\right)\right]}{x\left(1 + \frac{\sin x}{x} + \frac{\log_2 x}{x}\right)} \\ &= \frac{x\log_2 \mathrm{e} + \log_2\left(1 + \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\right)}{x\left(1 + \frac{\sin x}{x} + \frac{\log_2 x}{x}\right)}.\end{aligned}$$

Siccome

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\right) = 1$$

e

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\log_2\left(1 + \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\right) = 0,$$

deduciamo che $L = \log_2 \mathrm{e}$.

Esercizio 5.2. Calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{2x} + |\sin x|^{x^2}}{\left(2^{x\log x} + \mathrm{e}^x\right)^2}.$$

Soluzione. Abbiamo una forma indeterminata $[\frac{\infty}{\infty}]$. Dobbiamo individuare e fattorizzare i contributi dominanti a numeratore e denominatore.

Il numeratore è

$$\begin{aligned} N(x) &= x^{2x} + |\sin x|^{x^2} \\ &= x^{2x}\Big(1 + \frac{|\sin x|^{x^2}}{x^{2x}}\Big). \end{aligned}$$

Dunque, il contributo dominante al numeratore è x^{2n}, infatti

$$\lim_{x\to\infty}\Big(1 + \frac{|\sin x|^{x^2}}{x^{2x}}\Big) = 1. \tag{5.26}$$

Passiamo al denominatore. Fra $2^{x\log x}$ e e^x il termine dominante è $2^{x\log x} = (2^{\log x})^x$ in quanto $2^{\log x} > \mathrm{e}$ per tutte le x sufficientemente grandi. Nel seguito ci sarà utile anche la seguente identità

$$2^{\log x} = 2^{\log\left(2^{\log_2 x}\right)} = 2^{(\log_2 x)(\log 2)} = \left(2^{\log_2 x}\right)^{\log 2} = x^{\log 2}.$$

Dunque, il denominatore è

$$D(x) = \left(2^{x\log x} + \mathrm{e}^x\right)^2 = \left((x^{\log 2})^x + \mathrm{e}^x\right)^2 = \left(x^{x\log 2} + \mathrm{e}^x\right)^2 = x^{2x\log 2}\Big(1 + \Big(\frac{\mathrm{e}}{x^{\log 2}}\Big)^x\Big)^2.$$

Per tutte le x sufficientemente grandi si ha

$$\frac{\mathrm{e}}{x^{\log 2}} < \frac{1}{2},$$

in quanto la funzione a sinistra è infinitesima, e quindi

$$\Big(\frac{\mathrm{e}}{x^{\log 2}}\Big)^x < \frac{1}{2^x},$$

e siccome

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^x} = 0,$$

dal Teorema del Confronto segue che

$$\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{\mathrm{e}}{x^{\log 2}}\Big)^x = 0. \tag{5.27}$$

Formiamo il quoziente

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^{2x}}{x^{2x\log 2}}\frac{1 + \frac{|\sin x|^{x^2}}{x^{2x}}}{\Big(1 + \Big(\frac{\mathrm{e}}{x^{\log 2}}\Big)^x\Big)^2}.$$

Essendo $1 - \log 2 > 0$, si ha

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2x}}{x^{2x\log 2}} = \lim_{x\to\infty} x^{2x(1-\log 2)} = \infty.$$

Quindi, tenuto conto di (5.26) ed (5.27) usando il Teorema sulle operazione coi limiti deduciamo che

$$\lim_{x\to\infty}\frac{N(x)}{D(x)} = \infty.$$

Esercizio 5.3. Al variare di $\alpha > 0$ calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x}) + \mathrm{e}^{-1/x}}{x^\alpha}.$$

Soluzione. Esaminiamo separatamente i due limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x^\alpha} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x^\alpha}.$$

Se entrambi i limiti esistono (e non si creano forme indeterminate fra i due), possiamo determinare anche il limite della somma.

Calcoliamo il primo limite con la *tecnica di sostituzione*. Poniamo $\sqrt{x} = y$ ovvero $x = y^2$ e osserviamo che $x \to 0^+$ se e solo se $y \to 0^+$. Si trova:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x^\alpha} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(y)}{y^{2\alpha}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y^{2\alpha-1}} \frac{\sin(y)}{y} = \begin{cases} 0 & \text{se } 2\alpha - 1 < 0 \\ 1 & \text{se } 2\alpha - 1 = 0 \\ \infty & \text{se } 2\alpha - 1 > 0. \end{cases}$$

Riduciamo il secondo limite ad un limite noto con una sostituzione opportuna. Poniamo $x = 1/y$ ovvero $y = 1/x$ e osserviamo che $x \to 0^+$ se e solo se $y \to \infty$. Si trova

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x^\alpha} = \lim_{y\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y^{-\alpha}} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^\alpha}{\mathrm{e}^y} = 0$$

per ogni $\alpha > 0$.

La conclusione è:

$$L = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1/2 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1/2 \\ \infty & \text{se } \alpha > 1/2. \end{cases}$$

6. Analisi locale delle funzioni. Sviluppi asintotici

6.1. Nozione di "o piccolo".

Definizione 6.1. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme tale che 0 sia un suo punto di accumulazione e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione.

1) Diciamo che f è infinitesima per $x \to 0$ se
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$
Scriveremo in questo caso $f(x) = o(1)$ per $x \to 0$ ("f è un o piccolo di 1 per x che tende a 0").
2) Diciamo che f ha ordine di infinitesimo $n \in \mathbb{N}$ per $x \to 0$ se esiste finito e diverso da 0 il limite
$$L = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} \neq 0.$$
3) Sia $n \in \mathbb{N}$. Diciamo che $f(x) = o(x^n)$ per $x \to 0$ ("f è un o piccolo di x^n per x che tende a 0") se
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

4) Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$. Diciamo che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to 0$ se

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Notazione.
1) $o(1)$ indica una generica (non meglio precisata) funzione infinitesima per $x \to 0$.
2) $o(x^n)$ indica una generica (non meglio precisata) funzione che per $x \to 0$ tende a 0 più velocemente di x^n.

6.2. Algebra degli "o piccoli". I simboli di Landau (gli "o piccoli") verificano le seguenti regole operative.

Teorema 6.2. Per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ e per $x \to 0$ si ha:
1) $o(x^n) = x^n \cdot o(1)$;
2) Se $n \leq m$ allora $o(x^n) + o(x^m) = o(x^n)$;
3) Se $n < m$ allora $o(x^n) + x^m = o(x^n)$;
4) $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$;
5) Regola di sostituzione: se $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + o(x^n)$, con $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, allora

$$f(x^m) = a_1 x^m + a_2 x^{2m} + \ldots + a_{n-1} x^{(n-1)m} + o(x^{nm}).$$

Dim. Proviamo ad esempio 1). Sia $f(x) = o(x^n)$ per $x \to 0$, ovvero per definizione si abbia

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

Questo significa che $f(x)/x^n$ è infinitesima, ovvero $f(x)/x^n = o(1)$ per $x \to 0$, ovvero $f(x) = x^n o(1)$.

Proviamo ora 4). Siano $f(x) = o(x^n)$ e $g(x) = o(x^m)$ per $x \to 0$, ovvero per definizione si abbia

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^m} = 0.$$

Allora si ha anche, per il teorema sul prodotto dei limiti,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)g(x)}{x^{n+m}} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^m} = 0.$$

Questo significa che $f(x)g(x) = o(x^{n+m})$ per $x \to 0$.

Lasciamo le altre verifiche al lettore.

□

Osservazione 6.3.
1) Non si distingue fra $o(x^n)$, $ko(x^n)$ e $o(kx^n)$ con $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$, ovvero $o(x^n) = ko(x^n) = o(kx^n)$.
2) Se $f(x) = o(o(x^n))$ per $x \to 0$, allora è anche $f(x) = o(x^n)$ per $x \to 0$.

Esercizio 6.1. Calcolare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ della funzione

$$f(x) = x \sin(x^2) + \sin(x/2) \sin^2(x).$$

Soluzione. Sappiamo che
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$
e deduciamo dunque che per $x \to 0$ si ha
$$\frac{\sin x}{x} = 1 + o(1) \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = x(1+o(1)) \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = x + o(x).$$
Abbiamo trovato lo sviluppo al primo ordine della funzione $\sin x$. Dalla regola di sostituzione, troviamo immediatamente
$$\begin{aligned} &\sin(x^2) = x^2 + o(x^2) \\ &\sin\Big(\frac{x}{2}\Big) = \frac{x}{2} + o\Big(\frac{x}{2}\Big) = \frac{x}{2} + o(x). \end{aligned}$$
Lo sviluppo di $\sin^2(x)$ si trova in questo modo:
$$(\sin x)^2 = (x+o(x))^2 = x^2 + 2xo(x) + o(x)^2 = x^2 + 2o(x^2) + o(x^2) = x^2 + o(x^2).$$
In conclusione, si ottiene:
$$\begin{aligned} f(x) &= x(x^2 + o(x^2)) + \Big(\frac{x}{2} + o(x)\Big)(x^2 + o(x^2)) \\ &= x^3 + xo(x^2) + \frac{x^3}{2} + \frac{x}{2}o(x^2) + x^2 o(x) + o(x)o(x^2) \\ &= x^3 + o(x^3) + \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}o(x^3) + o(x^3) + o(x^3) \\ &= \frac{3}{2}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$
Deduciamo che f ha ordine di infinitesimo 3 per $x \to 0$. Infatti, si ha
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\Big(\frac{3}{2} + o(1)\Big) = \frac{3}{2} \neq 0.$$

7. Calcolo dei limiti con gli sviluppi asintotici

Useremo liberamente i seguenti sviluppi per le funzioni elementari. Le formule saranno dimostrate nel Capitolo 8, Sezione 10.
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$
$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$(1+x)^\alpha x = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + o(x^2)$$

$\operatorname{arctg}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$

Osservazione 7.1.

1) Le funzioni pari hanno nel loro sviluppo solo le potenze pari. Le funzioni dispari hanno nel loro sviluppo solo le potenze dispari.
2) La funzione $\log x$ NON ha sviluppo per $x \to 0$.
3) A titolo di esempio, il significato dello sviluppo

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

è il seguente: la funzione $\cos x$ differisce dal polinomio $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ per un errore $o(x^5)$ che tende a zero più velocemente di x^5 quando $x \to 0$.

Disegno.

Esercizio 7.1.

1) Sviluppare la funzione $[\log(1+x)]^2$ per $x \to 0$ in modo preciso fino al terzo ordine.

2) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\alpha x^2} - \cos x + [\log(1+x)]^2}{x^3}.$$

Soluzione. 1) Partiamo dallo sviluppo noto per $x \to 0$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Dunque, si ha

$$\begin{aligned}
[\log(1+x)]^2 &= \Big(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big)^2 \\
&= x^2 + \frac{x^4}{4} + o(x^2)^2 - x^3 + 2xo(x^2) - 2x^2 o(x^2) \\
&= x^2 + o(x^3) + o(x^4) - x^3 + o(x^3) + o(x^4) \\
&= x^2 - x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

2) Partendo dallo sviluppo noto

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

con la regola di sostituzione si ottiene

$$e^{\alpha x^2} = 1 + \alpha x^2 + \alpha^2 \frac{x^4}{2} + o\big(\alpha^2 x^4\big) = 1 + \alpha x^2 + o(x^3).$$

Inoltre, è noto anche lo sviluppo

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

In conclusione, il numeratore si sviluppa nel seguente modo:

$$\begin{aligned}N(x) &= \mathrm{e}^{\alpha x^2} - \cos x + [\log(1+x)]^2 \\ &= 1 + \alpha x^2 + o(x^3) - \Big(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\Big) + x^2 - x^3 + o(x^3) \\ &= \Big(\frac{3}{2} + \alpha\Big)x^2 - x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

Ora è facile calcolare il limite al variare di α:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\big(\frac{3}{2}+\alpha\big)x^2 - x^3 + o(x^3)}{x^3} = \begin{cases} \infty & \text{se } \alpha + \frac{3}{2} > 0 \\ -\infty & \text{se } \alpha + \frac{3}{2} < 0 \\ -1 & \text{se } \alpha + \frac{3}{2} = 0. \end{cases}$$

Esercizio 7.2. Calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\cosh x - 1)\log x + x^{x+1} - x}{\sin^2(x)\log x}.$$

Soluzione. Abbiamo una forma indeterminata $[\frac{0}{0}]$ e per risolverla usiamo la tecnica degli sviluppi infinitesimali. Osserviamo prima di tutto che $\log x$ NON si sviluppa per $x \to 0^+$: bisogna tenerlo così.

Iniziamo con le funzioni elementari:

$$\begin{aligned}\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + o(x^3) \\ \sin x &= x + o(x) \quad \Rightarrow \quad (\sin x)^2 = x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

Non è evidente come sviluppare la funzione x^{x+1}. Si può procedere nel seguente modo:

$$x^{x+1} = x x^x = x\mathrm{e}^{x\log x}.$$

Noi conosciamo lo sviluppo della funzione esponenziale per $x \to 0$:

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + o(x),$$

e siccome si ha

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x = 0,$$

per la regola di sostituzione si ottiene (se il limite sopra non fosse 0 l'applicazione della regola di sostituzione sarebbe errata)

$$\mathrm{e}^{x\log x} = 1 + x\log x + o(x\log x).$$

Ora possiamo sviluppare il numeratore:

$$\begin{aligned}N(x) &= (\cosh x - 1)\log x + x^{x+1} - x \\ &= \Big(\frac{x^2}{2!} + o(x^3)\Big)\log x + x\big(1 + x\log x + o(x\log x)\big) - x \\ &= \Big(\frac{x^2}{2!} + o(x^3)\Big)\log x + x^2\log x + x\,o(x\log x) \\ &= \frac{3}{2}x^2\log x + \log x\,o(x^3) + x\,o(x\log x).\end{aligned}$$

Ora osserviamo che

$$\log x\,o(x^3) + x\,o(x\log x) = x^3\log x o(1) + x^2\log x\,o(1) = x^2\log x\,o(1),$$

e quindi il numeratore è

$$N(x) = \frac{3}{2}x^2 \log x + x^2 \log x\, o(1) = x^2 \log x\Big(\frac{3}{2} + o(1)\Big).$$

Il denominatore è

$$D(x) = \sin^2(x) \log x = (x^2 + o(x^2)) \log x = x^2 \log x(1 + o(1)).$$

Siamo pronti per calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{N(x)}{D(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \log x\big(\frac{3}{2} + o(1)\big)}{x^2 \log x(1 + o(1))} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\big(\frac{3}{2} + o(1)\big)}{(1 + o(1))} = \frac{3}{2}.$$

Esercizio 7.3. Calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{1+\sin x}{1+x}\right)}{\sin x + \log(1 - x) + 1 - \cos x}.$$

Soluzione. Il numeratore è

$$N(x) = \log\Big(\frac{1 + \sin x}{1 + x}\Big) = \log(1 + \sin x) - \log(1 + x).$$

Lo sviluppo del logaritmo è

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Siccome $\sin x \to 0$ per $x \to 0$, per la regola di sostituzione si ottiene

$$\log(1 + \sin x) = \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} + o(\sin^3 x), \quad x \to 0.$$

Sviluppiamo le potenze del seno:

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4),\\ \sin^2 x &= \big(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\big)^2 = x^2 + o(x^2),\\ \sin^3 x &= \big(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\big)^3 = x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

Poi osserviamo che $o(\sin^3 x) = o(x^3)$, infatti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(\sin^3 x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{x^3} \cdot o(1) = 0.$$

In definitiva, il numeratore si sviluppa nel seguente modo:

$$\begin{aligned}N(x) &= \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{3}\sin^3 x + o(\sin^3 x) - \Big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big)\\ &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \frac{x^2}{2} + o(x^3) + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) + o(x^3) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\\ &= x^3\Big(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\Big) + o(x^3)\\ &= -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

Sviluppiamo il denominatore

$$
\begin{aligned}
D(x) &= \sin x + \log(1-x) + 1 - \cos x \\
&= \Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\Big) + \Big((-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{1}{3}(-x)^3 + o(x^3)\Big) + 1 - \Big(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\Big) \\
&= x^3\Big(-\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\Big) + o(x^3) = -\frac{1}{2}x^3 + o(x^3).
\end{aligned}
$$

Dunque

$$
\lim_{x\to 0} \frac{N(x)}{D(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6} + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1))} = \frac{1}{3}.
$$

Osservazione 7.2 (Domanda frequente). Quando si calcola un limite con gli sviluppi asintotici, quanto lunghi è necessario prenderli? La risposta è che occorre capirlo caso per caso. Una regola orientativa è la seguente: se, una volta scritti gli sviluppi e fatte le semplificazioni algebriche, rimangono solo gli "o piccoli", allora almeno uno degli sviluppi che si erano scritti era troppo corto.

8. Criterio del confronto asintotico per serie numeriche

Gli sviluppi asintotici sono anche efficienti per studiare la convergenza delle serie numeriche.

8.1. Criterio del confronto asintotico.

Teorema 8.1. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni positive, $a_n > 0$ e $b_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che esista finito e diverso da 0 il limite

$$
L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0.
$$

Allora:

$$
\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad \text{converge.}
$$

Dim. Per ipotesi si ha $L > 0$ e dunque $L/2 < L < 2L$. Quindi esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$
\frac{L}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2L.
$$

Di conseguenza valgono le disuguaglianze

$$
\frac{L}{2} \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n \leq 2L \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} b_n,
$$

e la tesi segue dal Criterio del Confronto. □

Osservazione 8.2. Dobbiamo studiare la convergenza della serie

$$
\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{8.28}
$$

dove $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Cerchiamo un numero reale $\alpha > 0$ tale che esista finito e diverso da zero il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n^\alpha} = n^\alpha a_n = L \neq 0.$$

Se un tale numero α esiste allora è unico e per confronto asintotico della serie data con la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

deduciamo che la serie (8.28) converge se e solo se $\alpha > 1$.

8.2. Esempi.

Esercizio 8.1. Stabilire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\big(\log(n+1) - \log n\big)}{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}}.$$

Soluzione. Partiamo dallo sviluppo elementare

$$\sin x = x + o(x), \quad x \to 0.$$

Poichè $1/n \to 0$ per $n \to \infty$, possiamo usare la regola di sostituzione ed ottenere

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

I due logaritmi non si sviluppano immediatamente. Lo sviluppo noto del logaritmo è $\log(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0$. Bisogna procedere in questo modo:

$$\log(n+1) - \log n = \log\frac{n+1}{n} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Infine, con le radici si lavora nel seguente modo:

$$\sqrt[4]{n+1} = n^{1/4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/4},$$

e usando lo sviluppo elementare

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x), \quad x \to 0,$$

con la regola di sostituzione si ottiene

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/4} = 1 + \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned}
\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n} &= n^{1/4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/4} - n^{1/4} \\
&= n^{1/4}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/4} - 1\right] \\
&= n^{1/4}\left[\frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n^{3/4}}\left[\frac{1}{4} + o(1)\right].
\end{aligned}$$

Dunque, il termine generale della serie si può sviluppare nel seguente modo:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\left(\log(n+1)-\log n\right)}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}} \\ &= \frac{\frac{1}{n}(1+o(1))\frac{1}{n}(1+o(1))}{\frac{1}{n^{3/4}}\left(\frac{1}{4}+o(1)\right)} \\ &= \frac{1+o(1)}{n^{5/4}\left(\frac{1}{4}+o(1)\right)}, \end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1/n^{5/4}} = 4 \neq 0.$$

Essendo $\alpha = 5/4 > 1$, dal criterio del confronto asintotico segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/4}} < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Esercizio 8.2. Stabilire per quali $\alpha > 0$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left|\sinh\left(\frac{1}{n}\right)-\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\right|.$$

Soluzione. Sviluppiamo il senoiperbolico e il logaritmo:

$$\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4), \quad x \to 0,$$

e quindi, poichè $1/n \to 0$ per $n \to \infty$, si ha

$$\sinh\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{3!n^3} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big), \quad n \to \infty.$$

Abbiamo scritto almeno due termini precisi nello sviluppo perchè il primo potrebbe semplificarsi con contributi provenienti dal logaritmo. Ricordiamo che

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

e quindi, poichè $1/n^\alpha \to 0$ per $n \to \infty$ (essendo $\alpha > 0$),

$$\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\Big(\frac{1}{n^{2\alpha}}\Big).$$

Di conseguenza, il termine generale della serie si sviluppa nel seguente modo

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n}\left|\sinh\left(\frac{1}{n}\right)-\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\right| \\ &= \sqrt{n}\left|\frac{1}{n}+\frac{1}{3!n^3}+o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)-\frac{1}{n^\alpha}+\frac{1}{2n^{2\alpha}}+o\Big(\frac{1}{n^{2\alpha}}\Big)\right| \end{aligned}$$

Dobbiamo distinguere tre casi:

1) $\alpha = 1$. In questo caso c'è una semplificazione algebrica nel termine generale.
2) $\alpha < 1$.
3) $\alpha > 1$.

1) Quando $\alpha = 1$, il termine generale è:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n}\Big|\frac{1}{6n^3} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big) + \frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big| \\ &= \sqrt{n}\Big|\frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big| \\ &= \frac{1}{n^{3/2}}\Big(\frac{1}{2} + o(1)\Big). \end{aligned}$$

Siccome

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty,$$

per il Criterio del confronto asintotico la serie data converge.

2) Quando $\alpha < 1$, il termine dominante dentro il valore assoluto è $1/n^\alpha$, e dunque:

$$a_n = \sqrt{n}\Big|\frac{1}{n^\alpha} + o\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big)\Big| = \frac{1}{n^{\alpha-1/2}}(1 + o(1)).$$

Siccome $\alpha - 1/2 < 1$ (nel caso $\alpha < 1$), per il Criterio del confronto asintotico la serie data diverge.

3) Quando $\alpha > 1$, il termine dominante dentro il valore assoluto è $1/n$, e dunque:

$$a_n = \sqrt{n}\Big|\frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big| = \frac{1}{\sqrt{n}}(1 + o(1)).$$

Per il Criterio del confronto asintotico la serie data diverge.

9. Forme indeterminate [1^∞]

Siano f e g due funzioni tali che

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} g(x) = \infty.$$

Vogliamo calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)}, \quad [1^\infty].$$

Si procede nel seguente modo:

$$f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{\log f(x)^{g(x)}} = \mathrm{e}^{g(x)\log f(x)},$$

e poi si sviluppa

$$\log f(x) = \log(1 + f(x) - 1) = f(x) - 1 + o(f(x) - 1) = (f(x) - 1)(1 + o(1)).$$

Quindi si deve calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{g(x)\log f(x)} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{g(x)(1-f(x))(1+o(1))},$$

e a questo punto basta risolvere la forma indeterminata $[\frac{0}{0}]$

$$\lim_{x\to 0} g(x)(1 - f(x)) = \lim_{x\to 0} \frac{1 - f(x)}{1/g(x)}.$$

Esercizio 9.1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \big(\cos x\big)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Soluzione. Col precedente procedimento si trova:

$$\begin{aligned}\big(\cos x\big)^{\frac{1}{x^2}} &= \mathrm{e}^{\log\big(\cos x\big)^{1/x^2}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}\log\big(\cos x\big)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}\log\big(1+\cos x-1\big)}\\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}\big[(\cos x-1)+o(\cos x-1)\big]}\\ &= \mathrm{e}^{\frac{\cos x-1}{x^2}\big(1+o(1)\big)}\\ &= \mathrm{e}^{\frac{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)-1}{x^2}\big(1+o(1)\big)} = \mathrm{e}^{\big(-\frac{1}{2}+o(x)\big)\big(1+o(1)\big)}.\end{aligned}$$

Di conseguenza:

$$\lim_{x\to 0}\big(\cos x\big)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\big(-\frac{1}{2}+o(x)\big)\big(1+o(1)\big)} = \mathrm{e}^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

10. Asintoti obliqui

DEFINIZIONE 10.1 (Asintoto). Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione. La retta di equazione $y = mx+q$, con $m, q\in\mathbb{R}$, si dice asintoto di f a ∞ (asintoto destro) se

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-(mx+q)\big) = 0.$$

La retta si dice asintoto di f a $-\infty$ (asintoto sinistro) se

$$\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(mx+q)\big) = 0.$$

OSSERVAZIONE 10.2 (Calcolo di m e q). Per stabilire l'esistenza di un eventuale asintoto obliquo (destro) si procede nel seguente modo. Si cerca in primo luogo il coefficiente angolare $m\in\mathbb{R}$

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Se un tale $m\in\mathbb{R}$ esiste, si cerca $q\in\mathbb{R}$

$$q = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx.$$

Se anche $q\in\mathbb{R}$ esiste (finito), si ha l'asintoto destro $y = mx+q$.

ESERCIZIO 10.1. Calcolare gli asintoti a $\pm\infty$ della funzione

$$f(x) = x+\sqrt{x^2+x}.$$

Soluzione. La funzione è definita per $x^2+x\geq 0$ ovvero per $x(x+1)\geq 0$ ovvero per $x\in(-\infty,-1]\cup[0,\infty)$.

Cerchiamo un eventuale asintoto destro:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to\infty} 1+\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 2,\\ q &= \lim_{x\to\infty} f(x)-mx = \lim_{x\to\infty}\Big(x+\sqrt{x^2+x}-2x\Big) = \lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}-x\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sqrt{x^2+x}}x = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1+1/x}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Quindi c'è l'asintoto destro

$$y = 2x+\frac{1}{2}.$$

Cerchiamo un eventuale asintoto sinistro:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to\infty} 1+\frac{\sqrt{x^2}}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} 1-\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 0.$$

Il fatto che $m=0$ suggerisce la possibile esistenza di un asintoto orizzontale sinistro. Cerchiamo q:

$$q = \lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+1/x}-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+1/x}-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+1/x}+1} = -\frac{1}{2}.$$

Quindi c'è un asintoto orizzontale sinistro $y=-1/2$.

Disegno.

CHAPTER 7

Funzioni continue

1. Definizione di continuità

DEFINIZIONE 1.1 (Limiti destro e sinistro). Siano $A \subset \mathbb{R}$ un insieme e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di A ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione.

1) Diciamo che
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \in \mathbb{R}$$
se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$x \in A \cap (x_0, x_0 + \delta) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$
Chiamiamo L il *limite destro* di f in x_0.

2) Diciamo che
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \in \mathbb{R}$$
se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$
Chiamiamo L il *limite sinistro* di f in x_0.

Disegno.

DEFINIZIONE 1.2 (Funzione continua). Siano $A \subset \mathbb{R}$ un insieme, $x_0 \in A$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione.

1) f si dice continua in $x_0 \in A$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in A \cap I_\delta(x_0).$$
2) f si dice continua su A se è continua in ogni punto $x_0 \in A$.

TEOREMA 1.3. Siano $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in A$. Sono equivalenti le seguenti quattro affermazioni:

1) f è continua in $x_0 \in A$;
2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;
3) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$;
4) Per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_n \in A$ e $x_n \to x_0$ si ha
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0). \tag{1.29}$$

Il punto 4) si dice *caratterizzazione sequenziale* della continuità.

DIM. Omessa. □

Osservazione 1.4. Possiamo riscrivere la formula (1.29) in questo modo:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big).$$

Il limite passa dentro l'argomento della funzione continua.

Teorema 1.5. Somma, prodotto e quoziente f/g, con $g \neq 0$, di funzioni continue è una funzione continua.

Dim. La prova segue dal Teorema 1.3 e dall'analogo Teorema sui limiti. □

2. Continuità delle funzioni elementari

Teorema 2.1. Le funzioni x^α, $\sin x$, $\cos x$, a^x sono continue nel loro dominio di definizione.

Dim. Omettiamo la prova che $x \mapsto x^\alpha$ è continua.

Proviamo che la funzione $x \mapsto \sin x$ è continua nel generico punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Nel punto $x_0 = 0$, per il Teorema 4.1 abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0 = \sin 0.$$

In generale, per la formula di addizione avremo

$$\sin(x + x_0) = \sin x \cos x_0 + \sin x_0 \cos x,$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0} \sin(x + x_0) = \lim_{x\to 0} \sin x \cos x_0 + \sin x_0 \cos x = \sin x_0,$$

in quanto $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

Proviamo che la funzione $x \mapsto \mathrm{e}^x$ è continua nel punto $x_0 = 0$. La tesi da provare è

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1 = \mathrm{e}^0.$$

Sappiamo che (Esempio 2.3)

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{1/n} = 1,$$

e quindi, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar n \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar n$ si ha $0 < \mathrm{e}^{1/n} - 1 < \varepsilon$. Detto $\delta = 1/\bar n$ e preso $0 < x < \delta$, usando il fatto che $x \mapsto \mathrm{e}^x$ è crescente si ottiene

$$0 < \mathrm{e}^x - 1 < \mathrm{e}^{1/\bar n} - 1 < \varepsilon.$$

Questo prova che

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = 1.$$

In modo analogo si prova che anche il limite sinistro è 0. In un generico punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{x+x_0} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{x_0} = \mathrm{e}^{x_0}.$$

□

3. Teoremi degli zeri e dei valori intermedi

TEOREMA 3.1 (degli zeri). Siano $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a) < 0$ ed $f(b) > 0$. Allora esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

DIM. Per il Teorema della permanenza del segno, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\begin{aligned} f(x) < 0 \quad &\text{per} \quad x \in [a, a+\delta] \\ f(x) > 0 \quad &\text{per} \quad x \in [b-\delta, b]. \end{aligned}$$

Definiamo l'insieme

$$B = \big\{x \in A : f(x) < 0\big\} \neq \emptyset,$$

e sia $x_0 = \sup B$. Tale estremo superiore esiste per l'Assioma di completezza. Avremo $a + \delta \leq x_0 \leq b - \delta$.

Siccome $x_0 + 1/n \notin B$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, avremo $f(x_0 + 1/n) \geq 0$, e quindi (qui usiamo la continuità di f in x_0 e la permanenza del segno):

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f\Big(x_0 + \frac{1}{n}\Big) \geq 0.$$

Siccome $x_0 = \sup B$, esiste una successione di punti $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $x_n \in B$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (ovvero $f(x_n) < 0$) e $x_n \to 0$. Dunque, usando di nuovo la continuità di f in x_0 e la permanenza del segno:

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq 0.$$

La conclusione è che $f(x_0) = 0$. □

TEOREMA 3.2 (dei valori intermedi). Siano $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, per ogni $y \in \mathbb{R}$ tale che $\inf_A f < y < \sup_A f$, l'equazione

$$f(x) = y$$

ha almeno una soluzione $x \in A$.

DIM. Basta applicare il Teorema degli zeri alla funzione continua $g(x) = f(x) - y$. Precisamente, siano $x_0, x_1 \in A$ punti tali che

$$\inf_A f < f(x_0) < y < f(x_1) < \sup_A f.$$

Allora si ha

$$g(x_0) = f(x_0) - y < 0, \quad g(x_1) = f(x_1) - y > 0.$$

Quindi per il teorema degli zeri esiste $x \in [x_0, x_1]$ tale che $g(x) = 0$, ovvero $f(x) = y$. □

ESERCIZIO 3.1. Verificare che l'equazione

$$\sin x = \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2, \quad x \in [0, \pi],$$

ha esattamente due soluzioni su $[0, \pi]$.

Soluzione. La funzione

$$f(x) = \sin x - \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2$$

è continua. Studiamo la funzione f sull'intervallo $[0, \pi/2]$. Siccome

$$f(0) = -\frac{\pi^2}{4} \quad \text{e} \quad f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 1 > 0,$$

per il Teorema degli zeri esiste $x_0 \in (0, \pi/2)$ tale che $f(x_0) = 0$. Poichè $\sin x$ è strettamente crescente su $[0, \pi/2]$ e $\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2$ è strettamente decrescente su $[0, \pi/2]$, la funzione f è strettamente crescente su $[0, \pi/2]$. Quindi f è iniettiva su $[0, \pi/2]$ e quindi lo zero $x_0 \in [0, \pi/2]$ è unico.

Con un argomento analogo si trova un secondo zero nell'intervallo $[\pi/2, \pi]$.

4. Continuità della funzione composta e della funzione inversa

Teorema 4.1. Siano $f : A \to B$ una funzione continua su A e $g : B \to C$ una funzione continua su B. Allora la funzione composta $g \circ f : A \to C$ è continua su A.

Dim. Siano $x_0 \in A$ ed $\varepsilon > 0$. Siccome g è continua nel punto $y_0 = f(x_0) \in B$ esiste $\eta > 0$ tale che

$$|y - f(x_0)| < \eta \quad \Rightarrow \quad |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon. \tag{4.30}$$

Siccome f è continua nel punto $x_0 \in A$ e quindi in corrispondenza di $\eta > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \eta. \tag{4.31}$$

Mettendo insieme (4.30) e (4.31) si ottiene:

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon.$$

Questa è la continuità di f in $x_0 \in A$. □

Teorema 4.2. Sia $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva. Allora:

i) f è strettamente monotòna (crescente oppure decrescente);
ii) $f(A) \subset \mathbb{R}$ è un intervallo;
iii) La funzione inversa $f^{-1} : f(A) \to A$ è continua.

Dim. La prova è omessa.

□

Corollario 4.3. Le funzioni $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\, x$ e $\log_a x$ sono continue nel loro dominio.

Esercizio 4.1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha \cos x + \log(\beta + x^2) & \text{per } x < 0; \\ \sqrt{x} + \beta x & \text{per } 0 \le x \le 1; \\ x^3 + \mathrm{e}^{\alpha x} & \text{per } x > 1. \end{cases}$$

Determinare, se esistono, i parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo tale che f sia continua su $\mathbb{R}$.

Soluzione. Deve essere $\beta \geq 0$, altrimenti $\log(\beta + x^2)$ non è definita per ogni $x < 0$. Su ciascuno dei tre intervalli

$$(-\infty, 0), \quad [0, 1], \quad (1, \infty)$$

f è continua in quanto somma e composizione di funzioni continue.

Dobbiamo imporre la continuità nei punti $x = 0$ e $x = 1$. Nel punto $x = 0$ imponiamo:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0.$$

Nel punto $x = 1$ imponiamo:

$$1 + \beta = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x).$$

Dunque, dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 0 = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to ^-} x^2 + \alpha \cos x + \log(\beta + x^2) \\ 1 + \beta = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^3 + \mathrm{e}^{\alpha x}, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 0 = 0 + \alpha + \log \beta \\ 1 + \beta = 1 + \mathrm{e}^{\alpha} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \log \beta = 0 \\ \beta = \mathrm{e}^{\alpha}. \end{cases}$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima:

$$0 = \alpha + \log \mathrm{e}^{\alpha} = \alpha + \alpha \log \mathrm{e} = 2\alpha,$$

e quindi $\alpha = 0$. Di conseguenza $\beta = \mathrm{e}^0 = 1$.

Esercizio 4.2. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^3 x}{(x^3 + x^2)^{3/2}}.$$

Soluzione. Osserviamo preliminarmente che

$$(x^3 + x^2)^{3/2} = \big(x^2(1 + x)\big)^{3/2} = |x|^3 (1 + x)^{3/2}.$$

Dunque, distinguendo i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin^3 x}{(x^3 + x^2)^{3/2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin^3 x}{x^3} \frac{1}{(1 + x)^{3/2}} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin^3 x}{(x^3 + x^2)^{3/2}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin^3 x}{(-x)^3} \frac{1}{(1 + x)^{3/2}} = -1.$$

I limite destro e sinistro sono diversi. Quindi il limite non esiste.

CHAPTER 8

Calcolo differenziale

1. Definizione di derivata

1.1. Definizione. Nel seguito sia $A = [a, b]$ oppure $A = (a, b)$ un intervallo aperto o chiuso, limitato o non limitato.

Definizione 1.1 (Derivata). Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice derivabile in un punto $x_0 \in A$ se esiste finito il seguente limite

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = Df(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Il numero $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ si dice *derivata* di f in x_0.

Osservazione 1.2. Si ha

$$f \text{ è derivabile in } x_0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ è continua in } x_0. \tag{1.32}$$

Infatti, se esiste $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, allora

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + o(1),$$

dove $o(1) \to 0$ per $x \to x_0$. Dunque, si trova

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

e pertanto

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

In (1.32) non vale l'implicazione opposta (la continuità non implica la derivabilità). Infatti, $f(x) = |x|$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ ma non è derivabile nel punto $x_0 = 0$. I limiti destro e sinistro del rapporto incrementale sono diversi:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = -1.$$

Disegno.

1.2. Interpretazione geometrica. Sia $\alpha(x)$ l'angolo indicato in figura:

Disegno

Allora il rapporto incrementale ha la seguente interpretazione trigonometrica

$$\operatorname{tg} \alpha(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{1.33}$$

Quando $x \to x_0$ il punto Q tende al punto P e l'angolo $\alpha(x)$ tende all'angolo α formato con l'asse delle x dalla retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$. Dunque, passando al limite in (1.33) si ottiene

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0).$$

Definizione 1.3 (Retta tangente). Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $x_0 \in A$. La retta di equazione

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \quad x \in \mathbb{R},$$

si chiama *retta tangente* al grafico di f nel punto x_0.

2. Derivata delle funzioni elementari

2.1. Funzioni costanti. Se $f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ è una funzione costante allora

$$Df(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

2.2. Monomi. Per $n \in \mathbb{N}$ si ha $Dx^n = nx^{n-1}$. Infatti:

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^n - f(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^i - x^n = nx^{n-1}h + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^i,$$

e quindi

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = nx^{n-1} + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^{i-1},$$

da cui si trova

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = nx^{n-1}.$$

2.3. Seno. $D \sin x = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Infatti, per la formula di addizione si ha

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \sin h \cos x,$$

e quindi

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} = \cos x.$$

2.4. Coseno. $D \cos x = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$. La prova è analoga alla precedente.

2.5. Esponenziale. Sia $a > 0$ una base fissata. Allora $Da^x = a^x \log a$, $x \in \mathbb{R}$. Formiamo il rapporto incrementale

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}.$$

Facciamo la sostituzione

$$t = \frac{1}{a^h - 1} \quad \Leftrightarrow \quad a^h - 1 = \frac{1}{t} \quad \Leftrightarrow \quad h \log a = \log\Big(1 + \frac{1}{t}\Big).$$

Osserviamo che nel caso $a > 1$ e $h > 0$ si ha $t > 0$. Inoltre:

$$h \to 0^+ \quad \Rightarrow \quad t \to \infty.$$

Dunque, troviamo

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \frac{\log a}{\log\left(1+\frac{1}{t}\right)} = \log a.$$

Abbiamo usato il limite notevole

$$\lim_{t\to\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \mathrm{e}.$$

Il limite per $h \to 0^-$ è analogo. La conclusione è che

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \log a.$$

2.6. Esponenziale. $D\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$, $x \in \mathbb{R}$. Segue dal punto precedente.

2.7. Logaritmo. $D \log|x| = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$. Nel logaritmo è ammesso il valore assoluto. Verifica:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log|x+h| - \log|x|}{h} = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{h} \log\left|\frac{x+h}{x}\right| = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{h} \log\left(1+\frac{h}{x}\right) = (*)$$

Abbiamo usato il fatto che per h piccolo $1+h/x > 0$ e si può togliere il valore assoluto. Facciamo ora la sostituzione

$$t = \log\left(1+\frac{h}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^t = 1 + \frac{h}{x} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{e}^t - 1)x = h,$$

dove $h \to 0 \Rightarrow t \to 0$. Quindi

$$(*) = \lim_{t\to 0} \frac{t}{x(\mathrm{e}^t - 1)} = \frac{1}{x}.$$

Abbiamo usato il punto precedente sulla derivata dell'esponenziale.

2.8. Senoi perbolico. $D \sinh x = \cosh x$, $x \in \mathbb{R}$. Infatti:

$$D \sinh x = D\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{D\mathrm{e}^x - D\mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \cosh x.$$

2.9. Coseno iperbolico. $D \cosh x = \sinh x$, $x \in \mathbb{R}$. Analogo al precedente.

2.10. Valore assoluto. $D|x| = \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Il valore assoluto non è derivabile per $x \neq 0$.

3. Operazioni sulle derivate

TEOREMA 3.1. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili su A. Allora per ogni $x \in A$:

1) $D(f+g)(x) = Df(x) + Dg(x)$;
2) $D(f \cdot g)(x) = g(x)Df(x) + f(x)Dg(x)$;
3) Se $g \neq 0$ allora

$$D\Big(\frac{1}{g}\Big)(x) = -\frac{Dg(x)}{g(x)^2}.$$

4) Se $g \neq 0$ allora

$$D\Big(\frac{f}{g}\Big)(x) = \frac{g(x)Df(x) - f(x)Dg(x)}{g(x)^2}.$$

DIM. Proviamo la 2):

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= g(x)f'(x) + f(x)g'(x).\end{aligned}$$

Abbiamo anche usato il fatto che g è continua, essendo derivabile.

Proviamo la 3):

$$\Big(\frac{1}{g}\Big)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{g(x+h)} - \dfrac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

La 4) segue da 2) e 3). □

ESEMPIO 3.2. Derivata della tangente:

$$D\mathrm{tg}\, x = D\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x D\sin x - \sin x D\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

ESEMPIO 3.3. Proviamo per induzione che $Dx^n = nx^{n-1}$. Per $n = 1$ la formula è vera (Base induttiva). Controlliamo il passo induttivo usando la regola per la derivata del prodotto:

$$Dx^n = D(x\cdot x^{n-1}) = (Dx)x^{n-1} + xDx^{n-1} = x^{n-1} + x(n-1)x^{n-2} = nx^{n-1}.$$

4. Derivata della funzione composta e inversa

4.1. Derivata della funzione composta.

TEOREMA 4.1 (Derivata della funzione composta). Sia $f : A \to B$ una funzione derivabile nel punto $x_0 \in A$ e sia $g : B \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $f(x_0) \in B$. Allora la funzione composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ è derivabile nel punto x_0 e inoltre

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

DIM. Introduciamo la funzione ausiliaria $h : B \to \mathbb{R}$

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} & y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) & y = f(x_0). \end{cases}$$

La funzione h è continua nel punto $y = f(x_0)$, essendo g derivabile in questo punto.

Per $x \neq x_0$ abbiamo

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = h(f(x))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Siccome $h \circ f$ è continua in x_0 (essendo composizione di funzioni continue) ed f è derivabile in x_0, si ha:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} h(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

□

Esempio 4.2. Calcoliamo la derivata

$$D \log\big(\log(1 + x^2)\big) = \frac{1}{\log(1 + x^2)} \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Esempio 4.3. Sia $\alpha > 0$. Proviamo che:

$$Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}, \quad x > 0.$$

Usando la regola della derivata della funzione composta si trova infatti:

$$Dx^\alpha = De^{\log x^\alpha} = De^{\alpha \log x} = e^{\alpha \log x} \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

4.2. Derivata della funzione inversa.

Teorema 4.4 (Derivata della funzione inversa). Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva e derivabile sull'intervallo $A = [a, b]$. Supponiamo che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$. Allora la funzione inversa $f^{-1} : f(A) \to A$ è derivabile in ogni punto $y = f(x) \in f(A)$ e inoltre

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{Df(x)}.$$

Dim. Fissiamo un punto $y_0 = f(x_0) \in A$. La funzione f^{-1} è continua nel punto y_0, per il Teorema 4.2. Dunque, se $y \to y_0$ allora $x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0) = x_0$. La dimostrazione ora è un conto basato sulla sostituzione $x = f^{-1}(y)$:

$$\begin{aligned} Df^{-1}(y_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{Df(x_0)}. \end{aligned}$$

□

4.3. Derivata dell'arcoseno. Si ha:

$$D \arcsin(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad -1 < y < 1.$$

La funzione arcoseno non è derivabile nei punti $y = \pm 1$.

Infatti, se $y = \sin x$, allora per il Teorema della derivata della funzione inversa:

$$D \arcsin(y) = \frac{1}{D \sin(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Nella formula $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ abbiamo scelto il segno + perchè nell'intervallo $(-\pi/2, \pi, 2)$ dove si inverte la funzione seno si ha $\cos x \geq 0$.

4.4. Derivata dell'arcocoseno. Si ha

$$D\arccos(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad -1 < y < 1.$$

La funzione arcocoseno non è derivabile nei punti $y = \pm 1$. La verifica è analoga alla precedente.

4.5. Derivata dell'arcotangente. Si ha

$$D\mathrm{arctg}(y) = \frac{1}{1+y^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Infatti, se $y = \mathrm{tg}\, x$, allora per il Teorema della derivata della funzione inversa:

$$D\mathrm{arctg}(y) = \frac{1}{D\mathrm{tg}(x)} = \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2(x)} = \frac{1}{1+y^2}.$$

ESERCIZIO 4.1. Determinare tutti i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha+1)\arcsin x - 6(\beta+3)\sin x & x \in [-1,0]. \\ 2\alpha(x^4+x) - (\beta+3)(\sqrt{x} + \mathrm{tg}\, x) & x \in (0,1] \end{cases}$$

sia derivabile nel punto $x = 0$.

Soluzione. Deve esistere finito il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Equivalentemente, devono esistere ed essere uguali i limiti destro e sinistro

$$L_+ = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = L^-.$$

Conti:

$$\begin{aligned} L_+ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\alpha(x^4+x) - (\beta+3)(\sqrt{x} + \mathrm{tg}\, x)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} 2\alpha(x^3+1) - (\beta+3)\Big(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\mathrm{tg}\, x}{x}\Big). \end{aligned}$$

Siccome $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$, affinchè il limite esista *finito* deve essere $\beta + 3 = 0$. Con la scelta $\beta = -3$ si trova $L_+ = 2\alpha$.

Limite sinistro:

$$\begin{aligned} L_- &= \lim_{x\to 0^-} \frac{(\alpha+1)\arcsin x - 6(\beta+3)\sin x}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{(\alpha+1)\arcsin x}{x} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{(\alpha+1)y}{\sin y} = \alpha + 1. \end{aligned}$$

Quindi dobbiamo imporre

$$2\alpha = \alpha + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 1.$$

In conclusione, f è derivabile in $x = 0$ se e solo se $\beta = -3$ e $\alpha = 1$.

5. Punti critici e punti di estremo locale

DEFINIZIONE 5.1 (Punti di estremo locale). Siano $A \subset \mathbb{R}$ un insieme ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione.

1) Un punto $x_0 \in A$ si dice punto di *minimo locale* di f su A se esiste $\delta > 0$ tale che
$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in A \cap I_\delta(x_0).$$
Il minimo locale è *stretto* se $f(x) > f(x_0)$ per $x \in A \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$.
2) Un punto $x_0 \in A$ si dice punto di *massimo locale* di f su A se esiste $\delta > 0$ tale che
$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in A \cap I_\delta(x_0).$$
Il massimo locale è *stretto* se $f(x) < f(x_0)$ per $x \in A \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$.
3) Un punto $x_0 \in A$ si dice punto di *estremo locale* di f su A se è un punto di minimo o massimo locale.

DEFINIZIONE 5.2 (Punto critico). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su A. Un punto $x_0 \in A$ si dice *punto critico* di f se $f'(x_0) = 0$.

TEOREMA 5.3. Siano $A \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in A$ ad $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Se x_0 è un punto di estremo locale allora $f'(x_0) = 0$.

DIM. Supponiamo ad esempio che x_0 si aun punto di minimo locale: esiste $\delta > 0$ tale che
$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Disegno

Usando il fatto che $f(x) \geq f(x_0)$, e la permanenza del segno si trova
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$
essendo nel limite $x > x_0$. Nel limite sinistro, invece $x < x_0$ e dunque
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$
Deduciamo che $f'(x_0) = 0$. □

OSSERVAZIONE 5.4. Osserviamo che

punto critico NON implica punto di estremo locale.

Infatti, la funzione $f(x) = x^3$ ha in $x = 0$ un punto critico in quanto $f'(0) = 0$, ma $x = 0$ non è nè un punto di minimo nè di massimo locale.

Disegno.

6. Teorema di Weierstrass

In questa sezione vogliamo dimostrare il Teorema di Weierstrass.

TEOREMA 6.1 (Weierstrass). Sia $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato (="intervallo compatto") e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esistono $x_0, x_1 \in A$ tali che

$$f(x_0) = \min_{x \in A} f(x) \quad \text{e} \quad f(x_1) = \max_{x \in A} f(x).$$

La dimostrazione richiede vari risultati preliminari.

6.1. Teorema di Bolzano.

TEOREMA 6.2 (Bolzano). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto, limitato, contenente infiniti elementi. Allora esiste almeno un $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di A.

DIM. Siccome A è limitato, esistono $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ con $a_1 < b_1$, tali che $A \subset [a_1, b_1] = A_1$. Sia $c_1 = (a_1 + b_1)/2$ il punto medio. Almeno uno dei due intervalli

$$[a_1, c_1] \quad \text{oppure} \quad [c_1, b_1]$$

contiene infiniti elementi di A. Per fissare le idee, supponiamo che sia $[a_1, c_1]$. Definiamo allora

$$a_2 = a_1, \quad b_2 = c_1, \quad c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}.$$

Osserviamo che

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}.$$

Sia $A_2 = [a_2, b_2] = [a_2, c_2] \cup [c_2, b_2]$. Uno dei due intervalli $[a_2, c_2]$ oppure $[c_2, b_2]|$ contiene infiniti elementi di A.

Per induzione, supponiamo di aver definito

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n < b_n \le b_{n-1} \le \ldots b_1$$

e $A_n = [a_n, b_n]$ che contiene infiniti elementi di A. Inoltre

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}.$$

Sia $c_n = (a_n + b_n)/2$ il punto medio. Almeno uno dei due intervalli

$$[a_n, c_n] \quad \text{oppure} \quad [c_n, b_n]$$

contiene infiniti elementi di A. Chiamiamo questo intervallo

$$A_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}],$$

dove

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_1 - a_1}{2^n}.$$

La successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente e limitata. Quindi esiste

$$L = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

La successione $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente e limitata. Quindi esiste

$$M = \lim_{n \to \infty} b_n.$$

D'altra parte

$$M - L = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = 0.$$

Quindi $M = L$. Proviamo che $x_0 = M = L$ è un punto di accumulazione di A. Sia $\delta > 0$. Siccome $x_0 \in A_n = [a_n, b_n]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, se

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} < \delta,$$

ovvero se $n > \log\big(2(b_1 - a_1)/\delta\big)/\log 2$, allora avremo la seguente inclusione

$$A_n \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = I_\delta(x_0).$$

Siccome A_n contiene infiniti elementi di A, segue che $A \cap I_\delta(x_0)$ contiene infiniti elementi. In particolare, per ogni $\delta > 0$ avremo

$$A \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset.$$

□

6.2. Sottosuccessioni.

Definizione 6.3 (Selezione crescente di indici). Una *selezione crescente di indici* è una successione $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $n_k \in \mathbb{N}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $k \mapsto n_k$ è strettamente crescente.

Definizione 6.4 (Sottosuccessione). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione e sia $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una selezione crescente di indici. La successione

$$\big(a_{n_k}\big)_{k\in\mathbb{N}}$$

si dice sottosuccessione di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Osservazione 6.5. Se una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha due sottosuccessioni che convergono a limiti diversi, allora NON esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Esempio 6.6. Il seguente limite non esiste:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n\cos(\pi n)\log\Big(\frac{n}{n+1}\Big).$$

Osserviamo preliminarmente che $\cos(\pi n) = (-1)^n$ è un fattore alternante. Inoltre, si ha lo sviluppo elementare del logaritmo

$$\log\Big(\frac{n}{n+1}\Big) = \log\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) = -\frac{1}{n+1} + o\Big(\frac{1}{n+1}\Big), \quad n \to \infty.$$

Dunque, la sottosuccessione degli indici pari è

$$a_{2n} = 2n\Big(-\frac{1}{2n+1} + o\Big(\frac{1}{2n+1}\Big)\Big) = -\frac{2n}{2n+1}\big(1 + o(1)\big) \to -1, \quad n \to \infty,$$

mentre la sottosuccessione degli indici dispari è

$$a_{2n+1} = (2n+1)\Big(-\frac{1}{2n+2} + o\Big(\frac{1}{2n+2}\Big)\Big) = -\frac{2n+1}{2n+2}\big(1 + o(1)\big) \to 1, \quad n \to \infty.$$

I due limiti sono diversi.

Teorema 6.7 (della sottosuccessione convergente). Ogni successione limitata ha una sottosuccessione convergente.

Dim. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata e consideriamo l'insieme

$$A = \big\{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\} \subset \mathbb{R}.$$

Per ipotesi, l'insieme A è limitato.

Ci sono due casi:

1^o Caso: A è finito (contiene un numero finito di elementi);

2^o Caso: A contiene infinito elementi.

Nel 1^o Caso esiste almeno un elemento $x \in A$ tale che $a_n = x$ per infiniti $n \in \mathbb{N}$. Quindi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione costante (e quindi convergente).

2^o Caso. Per il Teorema di Bolzano esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di A:

$$A \cap I_{1/k}(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset, \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N},$$

dove $I_{1/k}(x_0) = \big(x_0 - 1/k, x_0 + 1/k\big)$.

Dunque, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un indice $n_k \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_{n_k} \in A \cap I_{1/k}(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

Possiamo scegliere n_k in modo tale che $n_k < n_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dunque, $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una selezione crescente di indici. Siccome

$$|a_{n_k} - x_0| < \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

si ha

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = x_0.$$

□

6.3. Dimostrazione del Teorema di Weierstrass. In questa sezione dimostriamo il Teorema 6.1.

Dim. Dimostriamo l'esistenza di $x_0 \in A$, punto di minimo. Esiste, finito o $-\infty$, l'estremo inferiore

$$L = \inf f(A) = \inf \big\{f(x) \in \mathbb{R} : x \in A\big\}.$$

Per le proprietà dell'estremo inferiore esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

Siccome la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata (essendo A limitato), esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0,$$

per qualche $x_0 \in A$ (essendo A chiuso). Chiaramente

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = L.$$

Siccome f è continua e $x_{n_k} \to x_0$ per $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f\Big(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\Big) = f(x_0)$$

Dunque, troviamo
$$f(x_0) = L = \inf_{x\in A} f(x).$$
Questo prova che $L \in \mathbb{R}$ e $f(x_0) = \min_{x\in A} f(x)$.

□

7. Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy

TEOREMA 7.1 (Rolle). Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$ con $-\infty < a < b < \infty$ e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$, derivabile su (a,b) e tale che $f(a) = f(b)$. Allora esiste $x \in (a,b)$ tale che $f'(x) = 0$.

DIM. Per il Teorema di Weierstrass esistono $x_0, x_1 \in [a,b]$ tali che
$$f(x_0) = \min_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(x_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Distinguiamo due casi:

1^o Caso: $x_0, x_1 \in \{a,b\}$. Siccome $f(a) = f(b)$ questo implica che f è costante e quindi $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$.

2^o Caso: $x_0 \in (a,b)$ oppure $x_1 \in (a,b)$. Dunque c'è almeno un punto di estremo interno, ad esempio x_0. Ma allora, per il Teorema 5.3 si ha $f'(x_0) = 0$. □

Disegno

TEOREMA 7.2 (Lagrange). Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$ con $-\infty < a < b < \infty$ e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$ e derivabile su (a,b). Allora esiste $x \in (a,b)$ tale che
$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

DIM. Introduciamo la funzione ausiliaria
$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a,b].$$
Questa funzione è continua su $[a,b]$ e derivabile su (a,b), ed inoltre
$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) \\ h(b) &= f(b) - \big(f(b) - f(a)\big) = f(a). \end{aligned}$$
Per il Teorema di Rolle esiste $x \in (a,b)$ tale che
$$0 = h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Disegno

□

COROLLARIO 7.3. Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Allora f è costante.

Dim. Siano $x_1, x_2 \in (a,b)$ due punti generici. Per il Teorema di Lagrange esiste $x \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(x)(x_1 - x_2) = 0.$$

Quindi $f(x_1) = f(x_2)$. $\square$

Esercizio 7.1. Provare che la funzione $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ è costante su $[-1,1]$. Determinare questa costante.

Esercizio 7.2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \mathrm{arctg}(x) + \mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

Provare che la funzione f è costante su ciascuno dei due intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$. Determinare le due costanti.

Teorema 7.4 (Cauchy). Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue su $[a,b]$ e derivabili su (a,b). Supponiamo che $g(a) \neq g(b)$. Allora esiste $x \in (a,b)$ tale che

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Dim. Consideriamo la funzione ausiliaria

$$h(x) = \big(f(b) - f(a)\big)g(x) - \big(g(b) - g(a)\big)f(x), \quad x \in [a,b]$$

Questa funzione è continua su $[a,b]$ e derivabile su (a,b), ed inoltre

$$h(a) = \big(f(b) - f(a)\big)g(a) - \big(g(b) - g(a)\big)f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$$
$$h(b) = \big(f(b) - f(a)\big)g(b) - \big(g(b) - g(a)\big)f(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a).$$

Per il Teorema di Rolle esiste $x \in (a,b)$ tale che

$$0 = h'(x) = \big(f(b) - f(a)\big)g'(x) - \big(g(b) - g(a)\big)f'(x)$$

e la tesi segue. $\square$

8. Derivata e monotonia

Teorema 8.1. Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora:
1) f è crescente $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$;
2) $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b)$ $\Rightarrow$ f è strettamente crescente.

Dim. 1) Supponiamo che f sia crescente. Allora per $x \in (a,b)$ ed $h > 0$ si ha

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Dunque, passando al limite

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Supponiamo ora che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Siano $x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$. Per il Teorema di Lagrange esiste $x \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x)(x_2 - x_1) \geq 0.$$

Abbiamo provato che $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$.

2) La prova è analoga ed è omessa. □

Esercizio 8.1. Sia data la funzione

$$f(x) = (x^2 + 2x - 3)e^{x^2+2x}, \quad x \in [-1, 1].$$

Calcolare i punti di massimo e minimo (assoluti e relativi) di f su $[-1, 1]$.

Soluzione. Calcoliamo la derivata:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x + 2)e^{x^2+2x} + (x^2 + 2x - 3)(2x + 2)e^{x^2+2x} \\ &= 2(x + 1)(x^2 + 2x - 2)e^{x^2+2x}. \end{aligned}$$

Calcoliamo i punti critici:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 1)(x^2 + 2x - 2) = 0.$$

Si trova la soluzione $x = -1$. Questo punto critico è un estremo dell'intervallo $[-1, 1]$. Troviamo le radici del polinomio quadratico:

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \pm \sqrt{3}.$$

La soluzione $x = -1 - \sqrt{3}$ è da scartare in quanto $-1 - \sqrt{3} \notin [-1, 1]$. Invece si ha $-1 + \sqrt{3} \in [-1, 1]$. Infatti:

$$-1 + \sqrt{3} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3 < 4.$$

Studiamo il segno della derivata. Siccome $x + 1 \geq 0$ su $[-1, 1]$, si ha

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\ &\qquad x \geq \sqrt{3} - 1 \quad (\text{e } x \leq -1 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Dunque,

Tabella

Calcoliamo f nei punti $-1, \sqrt{3} - 1, 1$:

$$\begin{aligned} f(-1) &= (1 - 2 - 3)e^{1-2} = -4e^{-1} < 0 \\ f(\sqrt{3} - 1) &= (3 + 1 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2 - 3)e^2 = -e^2 \\ f(1) &= (1 + 2 - 3)e^{1+2} = 0. \end{aligned}$$

Dunque, $x = 1$ è il punto di massimo assoluto.

Disegno

Esercizio 8.2. Verificare che

$$\log\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) > \frac{1}{x + 1}, \quad x > 0.$$

Soluzione. Formiamo la differenza

$$f(x) = \log\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) - \frac{1}{x + 1}, \quad x > 0.$$

Vogliamo provare che $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$. I limite agli estremi sono:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) &= \log 1 - 0 = 0, \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \log(\infty) - 1 = \infty. \end{aligned}$$

Calcoliamo la derivata:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{1}{x(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Quindi $f'(x) < 0$ per ogni $x > 0$. Dunque, f è decrescente su $(0, \infty)$, strettamente. Di conseguenza:

$$x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(y),$$

e con $y \to \infty$ si ottiene $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$.

Esercizio 8.3. Verificare che la funzione

$$f(x) = \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x, \quad x > 0$$

è (strettamente) crescente.

Soluzione. Conviene studiare la funzione

$$g(x) = \log f(x) = x \log\Big(1 + \frac{1}{x}\Big).$$

Se g è crescente, anche $f(x) = \mathrm{e}^{g(x)}$ è crescente. La derivata di g è:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \log\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) + x\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}} \\ &= \log\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) + x\frac{1}{1+x} > 0 \end{aligned}$$

per l'esercizio precedente. Dunque g è (strettamente) crescente.

Osservazione 8.2. Il limite

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x$$

esiste, perchè f è crescente. Siccome

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n = \mathrm{e},$$

deve anche essere

$$\lim_{x\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x = \mathrm{e}.$$

Di conseguenza, per $k \in \mathbb{R}$ (ad esempio per $k > 0$) si ha

$$\lim_{x\to\infty} \Big(1 + \frac{k}{x}\Big)^x = \lim_{t\to\infty} \Big[\Big(1 + \frac{1}{t}\Big)^t\Big]^k = \mathrm{e}^k.$$

ESERCIZIO 8.4. Sia $\alpha \in (0,1]$ un numero reale fissato. Verificare che per ogni $x, y \geq 0$ si ha
$$(x+y)^\alpha \leq x^\alpha + y^\alpha.$$

Soluzione. Possiamo supporre $y > 0$. Dividendo per y^α si ottiene la disuguaglianza equivalente
$$\Big(\frac{x}{y}+1\Big)^\alpha + \Big(\frac{x}{y}\Big)^\alpha + 1,$$
e ponendo $t = x/y$ si ottiene la disuguaglianza
$$(t+1)^\alpha \leq t^\alpha + 1, \quad t \geq 0.$$
Studiamo la funzione
$$\varphi(t) = t^\alpha + 1 - (t+1)^\alpha, \quad t \geq 0.$$
La sua derivata è:
$$\varphi'(t) = \alpha t^{\alpha-1} - \alpha(t+1)^{\alpha-1}.$$
Studiamo il segno della derivata (qui usiamo $\alpha > 0$):
$$\begin{aligned} \varphi'(t) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad t^{\alpha-1} \geq (t+1)^{\alpha-1} \\ &\Leftrightarrow \quad (t+1)^{1-\alpha} \geq t^{1-\alpha}, \end{aligned}$$
e l'ultima disuguaglianza è verificata in quanto $1-\alpha \geq 0$. Quindi φ è crescente e di conseguenza
$$\varphi(t) \geq \varphi(0) = 0, \quad \text{per ogni } t \geq 0.$$

ESEMPIO 8.3. Proviamo che per $1 < \alpha < 2$ la serie
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$$
converge.

Consideriamo la funzione $f(x) = x^{\alpha-1}$, $x \geq 0$. La funzione è derivabile per $x > 0$ (ma non nel punto $x = 0$). Inoltre si ha
$$f'(x) = (\alpha-1)x^{\alpha-2} > 0,$$
in quanto $\alpha > 1$. La derivata seconda, invece è negativa:
$$f''(x) = (\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3} < 0,$$
in quanto $1 < \alpha < 2$. Quindi f' è decrescente. Siano ora $0 < a < b$. Per il Teorema di Lagrange esiste $x \in (a,b)$ tale che
$$f(b) - f(a) = f'(x)(b-a) \geq f'(b)(b-a),$$
in quanto $f'(x) \geq f'(b)$ essendo $x < b$.

Scegliamo $b = \dfrac{1}{n}$ e $a = \dfrac{1}{n+1}$. Troviamo
$$\begin{aligned} \Big(\frac{1}{n}\Big)^\alpha - \Big(\frac{1}{n+1}\Big)^\alpha &\geq (\alpha-1)\Big(\frac{1}{n}\Big)^{\alpha-2}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) \\ &= (\alpha-1)\frac{1}{n^{\alpha-2}}\frac{1}{n(n+1)} \\ &\geq \frac{\alpha-1}{2}\frac{1}{n^\alpha}. \end{aligned}$$

Nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato $n+1 \leq 2n$. Possiamo dunque confrontare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{2}{\alpha-1} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n}\Big)^{\alpha-1} - \Big(\frac{1}{n+1}\Big)^{\alpha-1} < \infty.$$

Infatti l'ultima serie è telescopica convergente.

9. Teoremi di Hospital

Teorema 9.1 (Hospital 1). Siano $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in [a,b]$, ed $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue su $[a,b]$ e derivabili su $[a,b] \setminus \{x_0\}$. Supponiamo che:

i) $f(x_0) = g(x_0) = 0$;
ii) $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$;
iii) Esiste finito o infinito il limite

$$L = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in [-\infty, \infty].$$

Allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Dim. È sufficiente verificare che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L$$

per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $x_n \in [a,b] \setminus \{x_0\}$ e $x_n \to x_0$ per $n \to \infty$.

Per il Teorema di Cauchy, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $\bar{x}_n \in (x_0, x_n)$ tale che

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \frac{f'(\bar{x}_n)}{g'(\bar{x}_n)}.$$

Siccome $\bar{x}_n \to x_0$ per $n \to \infty$, si ottiene

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f'(\bar{x}_n)}{g'(\bar{x}_n)} = L.$$

□

Teorema 9.2 (Hospital 2). Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili tali che:

i) $\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = \infty$;
ii) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$;
iii) Esiste finito o infinito il limite

$$L = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Dim. Omessa. □

Teorema 9.3 (Hospital 3). Siano $f, g : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili tali che:

i) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$ (oppure 0);

ii) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x > a$;
iii) Esiste finito o infinito il limite

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Allora esiste anche il limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

DIM. Omessa. □

ESERCIZIO 9.1. Verificare che per $x \to 0$ si ha lo sviluppo asintotico

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

Soluzione. Dobbiamo verificare che

$$\mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} = o(x^3), \quad x \to 0,$$

ovvero che

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!}}{x^3} = 0.$$

Abbiamo una forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Calcoliamo L applicando tre volte di seguito il Teorema di Hospital

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{6} = 0.$$

ESERCIZIO 9.2. Per $\alpha > 0$ calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x.$$

Soluzione. Trasformiamo il limite in una forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ e utilizziamo il Teorema di Hospital:

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0.$$

ESERCIZIO 9.3. Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

è derivabile nel punto $x = 0$.

Soluzione. Verifichiamo preliminarmente che f è continua nel punto $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{-1/|x|} = [\mathrm{e}^{-\infty}] = 0 = f(0).$$

La funzione è continua in $x = 0$. Dobbiamo verificare che esiste finito il limite del rapporto incrementale:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-1/|x|}}{x}.$$

Qui siamo in presenza di una forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Applicare il Teorema di Hospital immediatamente non è risolutivo. Occorre trasformare la forma indeterminata in una forma $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{\mathrm{e}^{1/|x|}} = \lim_{x\to 0} \frac{-1/x^2}{\mathrm{e}^{1/|x|}\cdot\Big(-\dfrac{x}{|x|^3}\Big)} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^3}{x^3}\mathrm{e}^{-1/|x|} = 0.$$

Dunque, si ha $f'(0) = 0$. La funzione f è derivabile in $x = 0$.

Esercizio 9.1. Verificare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\mathrm{e}^{-1/|x|} = o(x^n)$ per $x \to 0$. Precisamente, verificare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-1/|x|}}{x^n} = 0.$$

Procedere per induzione.

10. Teorema di Taylor

Sia $A = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione.

Definizione 10.1 (Funzioni di classe C^k e di classe C^∞).
1) $f \in C(A) \Leftrightarrow f$ è continua su A.
2) $f \in C^1(A) \Leftrightarrow f'$ esiste su A e $f' \in C(A)$.
3) $f \in C^2(A) \Leftrightarrow f''$ derivata seconda di f esiste su A e $f'' \in C(A)$.
4) $f \in C^k(A) \Leftrightarrow f^{(k)}$ derivata k-esima di f esiste su A e $f^{(k)} \in C(A)$, $k \in \mathbb{N}$.
5) $f \in C^\infty(A) \Leftrightarrow f \in C^k(A)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Sia $x_0 \in A$ un punto fissato. Vogliamo approssimare f intorno a x_0 con una somma di monomi del tipo $c_k(x - x_0)^k$ con $c_k \in \mathbb{R}$ costanti da determinare in modo opportuno.

Definizione 10.2 (Polinomio di Taylor). Siano $A \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $f \in C^\infty(A)$ e $x_0 \in A$. Il *polinomio di Taylor* di f di grado $n \in \mathbb{N}$ e punto base (centro) x_0 è

$$\begin{aligned} P_n(x, x_0) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^n \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Teorema 10.3 (Taylor). Siano $f \in C^\infty(A)$, $x_0 \in A$ ed $n \in \mathbb{N}$. Allora il *resto* n-esimo

$$R_n(x, x_0) = f(x) - P_n(x, x_0)$$

verifica le seguenti proprietà. Per ogni $x \in A$ esiste $\xi \in (x_0, x)$ tale che

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{10.34}$$

In particolare, si ha

$$R_n(x, x_0) = o\big((x - x_0)^n\big), \quad x \to x_0. \tag{10.35}$$

Osservazione 10.4. Il Teorema di Taylor afferma che

$$f(x) = P_n(x, x_0) + R_n(x, x_0),$$

dove il resto (l'errore commesso sostituendo alla funzione la sua approssimazione) verifica delle precise stime di piccolezza. La formula (10.34) si dice *resto in forma di Lagrange*. La formula (10.35) si dice *resto in forma di Peano.*

Dim. Proviamo la formula (10.34). Introduciamo le due funzioni ausiliarie:

$$\begin{aligned} G(x) &= (x - x_0)^{n+1}, \\ F(x) &= R_n(x, x_0) = f(x) - P_n(x, x_0). \end{aligned}$$

Chiaramente si ha $F, G \in C^\infty(A)$. Calcoliamo le derivate di G nel punto x_0:

$$\begin{aligned} &G^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{per } k = 0, 1, \dots, n \\ &G^{(n+1)}(x) = (n+1)! \end{aligned}$$

Vogliamo ora calcolare le derivate di F nel punto x_0. Prima calcoliamo la derivata k-esima di F in un generico punto x:

$$F^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - \sum_{h=0}^{n} \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!} \big[(x - x_0)^h\big]^{(k)}.$$

Valutiamo queste derivate nel punto x_0. Osserviamo che

$$\big[(x - x_0)^h\big]^{(k)}\Big|_{x=x_0} = \begin{cases} k! & \text{se } k = h, \\ 0 & \text{se } k \neq h. \end{cases}$$

Quindi, si trova

$$F^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{se } k = 0, 1, \dots, n,$$

mentre per $k = n + 1$ si trova

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x), \quad x \in A.$$

Dopo questi conti preparatori, usiamo ripetutamente il Teorema di Cauchy:

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{G(x)} &= \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} \quad \text{esiste } \xi_1 \in (x_0, x) \\ &= \frac{F'(\xi_1) - F'(x_0)}{G'(\xi_1) - G'(x_0)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} \quad \text{esiste } \xi_2 \in (x_0, \xi_1) \\ &= \qquad \dots \qquad = \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} \quad \text{esiste } \xi_n \in (x_0, \xi_{n-1}) \\ &= \frac{F^{(n)}(\xi_n) - F^{(n)}(x_0)}{G^{(n)}(\xi_n) - G^{(n)}(x_0)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{G^{(n+1)}(\xi)} \quad \text{esiste } \xi \in (x_0, \xi_n) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Deduciamo che $F(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} G(x)$, ovvero

$$f(x) = P_n(x, x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Questo prova la (10.34). Ovviamente si ha

$$(x-x_0)^{n+1} = o\big((x-x_0)^n\big), \quad x \to x_0,$$

e la formula (10.35) sul resto in forma di Peano segue. □

10.1. Sviluppo della funzione esponenziale. Sia $f(x) = \mathrm{e}^x$ con $x \in \mathbb{R}$ e fissiamo il punto base $x_0 = 0$. Calcoliamo lo sviluppo di Taylor. Chiaramente si ha

$$f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x, \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R},$$

e dunque $f^{(k)}(0) = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Deduciamo che

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}.\end{aligned}$$

10.2. Sviluppo del seno. Sviluppiamo la funzione $f(x) = \sin x$ intorno al punto base $x_0 = 0$. Calcoliamo le prime quattro derivate

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & f(0) = 0\\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1\\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0\\ f^{(3)}(x) = -\cos x & f^{(3)}(0) = -1\\ f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4)}(0) = 0. \end{array}$$

In generale, avremo

$$f^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dunque, si trova lo sviluppo

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2n+1} + \frac{(D^{(2n+2)}\sin)(\xi)}{(2n+2)!}x^{2n+2},$$

dove $x \in \mathbb{R}$ e $\xi \in (0,x)$. Con $D^{(2n+2)}\sin x = (-1)^{n+1}\sin x$ si intende la derivata $(2n+2)$-esima di sin. Osserviamo che

$$(D^{(2n+2)}\sin)(\xi)x^{2n+2} = o(x^{2n+2}), \quad x \to 0.$$

Esercizio 10.1. Ricavare lo sviluppo di $f(x) = \cos x$ con punto base $x_0 = 0$.

10.3. Sviluppo del logaritmo. Calcoliamo lo sviluppo della funzione $f(x) = \log(1+x)$ con punto base $x_0 = 0$. Calcoliamo le prime derivate della funzione:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \log(1+x) & f(0) = 0\\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x} & f'(0) = 1\\ f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} & f''(0) = -1\\ f^{(3)}(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3} & f^{(3)}(0) = 2! \end{array}$$

Più in generale avremo

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)!(1+x)^{-k},$$

e quindi

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!$$

Di conseguenza si ottiene lo sviluppo

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k + \frac{(-1)^n(\xi)}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1},\end{aligned} \tag{10.36}$$

dove $x > -1$ e $\xi \in (0, x)$.

10.4. Sviluppo dell'arcotangente. Sviluppiamo la funzione $f(x) = \mathrm{arctg}(x)$ nel punto $x_0 = 0$ con precisione fino all'ordine 3. Le prime derivate sono

$$\begin{aligned}
&f(x) = \mathrm{arctg}(x) && f(0) = 0\\
&f'(x) = \frac{1}{1+x^2} && f'(0) = 1\\
&f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} && f''(0) = 0\\
&f^{(3)}(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2xD(1+x^2)^2}{(1+x^2)^4} && f^{(3)}(0) = -2.
\end{aligned}$$

Si ottiene lo sviluppo con resto di Peano

$$\mathrm{arctg}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

ESERCIZIO 10.1. Calcolare $\log(3/2)$ con un errore minore di $1/100$.

Soluzione. Per $x > -1$ si ha lo sviluppo

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k + R_n(x,0), \quad R_n(x,0) = \frac{(-1)^n(1+\xi)^{-n-1}}{n+1}x^{n+1},$$

dove $\xi \in (0, x)$. Con $x = 1/2$ si avrà $0 < \xi < 1/2$, e quindi il resto ha la forma

$$R_n(x,0) = \frac{(-1)^n(1+\xi)^{-1-n}}{(n+1)2^{n+1}},$$

e verifica

$$|R_n(x,0)| \le \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}} \le \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}.$$

Cerchiamo $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{1}{(n+1)2^{n+1}} < \frac{1}{100} \quad \Leftrightarrow \quad 100 < (n+1)2^{n+1}.$$

Con $n = 4$ si trova

$$(n+1)2^{n+1} = 5 \cdot 32 = 160,$$

e la disuguaglianza precedente è verificata. Quindi si trova:

$$\log\Big(\frac{3}{2}\Big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\Big)^3 - \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2}\Big)^4 + \text{Errore},$$

con $|\text{Errore}| < 1/100$.

10.5. Sviluppo di Taylor.

DEFINIZIONE 10.5 (Sviluppo di Taylor). Siano $A = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervallo ed $f \in C^\infty(A)$. Si dice che f si sviluppa in serie di Taylor su A se per ogni punto base $x_0 \in A$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x, x_0) = 0, \quad \text{per ogni } x \in A.$$

In questo caso la funzione f si esprime come serie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad x \in A.$$

ESEMPIO 10.6. Verifichiamo che $f(x) = \mathrm{e}^x$, $x \in \mathbb{R}$, si sviluppa in serie di Taylor su $\mathbb{R}$, as esempio con punto base $x_0 = 0$. Infatti, il resto n-esimo è

$$R_n(x, 0) = \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n + 1)^n} x^{n+1}, \quad \text{con } \xi \in (0, x).$$

Sappiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!} = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x, 0) = 0.$$

Di conseguenza si ottiene lo sviluppo di Taylor

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 10.2. Verificare che le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono sviluppabili in serie di Taylor e risulta

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k + 1)!} x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2n}.$$

10.6. Identità di Eulero. Nella formula

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

sostituiamo ix al posto di x. Si trova

$$\mathrm{e}^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} i^k.$$

Abbiamo $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. In generale si ha

$$i^k = \begin{cases} (-1)^m & \text{se } k = 2m \\ (-1)^m i & \text{se } k = 2m + 1. \end{cases}$$

Dunque, si trova l'identità di Eulero

$$\mathrm{e}^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k + 1)!} x^{2n+1} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2n} = \sin x + i \cos x.$$

CHAPTER 9

Integrale di Riemann

1. Definizione dell'integrale di Riemann

Consideriamo un intervallo chiuso e limitato $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definizione 1.1 (Suddivisione). Una *suddivisione* di A è un insieme ordinato di punti $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, con $n \geq 1$. Indichiamo con $\mathcal{D}(A)$ l'insieme di tutte le suddivisioni di A.

Definizione 1.2 (Suddivisione più fine). Siano D_1 e D_2 due suddivisioni di A. Diremo che D_1 è più fine di D_2 se tutti i punti di D_2 sono contenuti in D_1, ovvero se $D_2 \subset D_1$.

Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione *limitata*. Data una suddivisione $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, sia $A_i = [x_{i-1}, x_i]$, con $i = 1, \ldots, n$, l'i-esimo intervallo associato a questa suddivisione. Essendo f limitata, sono finiti i seguenti estremi inferiore e superiore

$$m_i = \inf_{x \in A_i} f(x) \quad \text{e} \quad M_i = \sup_{x \in A_i} f(x).$$

Si chiamano rispettivamente *somme inferiori* e *somme superiori* di f relativamente alla suddivisione D i valori

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{e} \quad S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Somme inferiori e superiori ammettono una semplice interpretazione geometrica come aree di opportune unioni di rettangoli. Si vedano le Figure 1 e 2.

Proposizione 1.3 (Proprietà delle somme inferiori e superiori). Valgono i seguenti fatti:

1) Per ogni suddivisione D vale $s(f, D) \leq S(f, D)$.
2) Se D_1 è una suddivisione più fine di D_2, allora sia ha

$$s(f, D_1) \geq s(f, D_2) \quad \text{e} \quad S(f, D_1) \leq S(f, D_2).$$

3) Date due suddivisioni generiche D_1 e D_2, si ha sempre $s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$.
4) Si ha sempre:

$$\sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f, D) \leq \inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f, D). \tag{1.37}$$

Dim. Per verificare l'affermazione 3), osserviamo che la suddivisione $D_1 \cup D_2$ è più fine sia di D_1 che di D_2. Quindi, dalle proprietà 1) e 2) segue che

$$s(f, D_1) \leq s(f, D_1 \cup D_2) \leq S(f, D_1 \cup D_2) \leq S(f, D_2).$$

L'affermazione 4) discende direttamente dalla 3). □

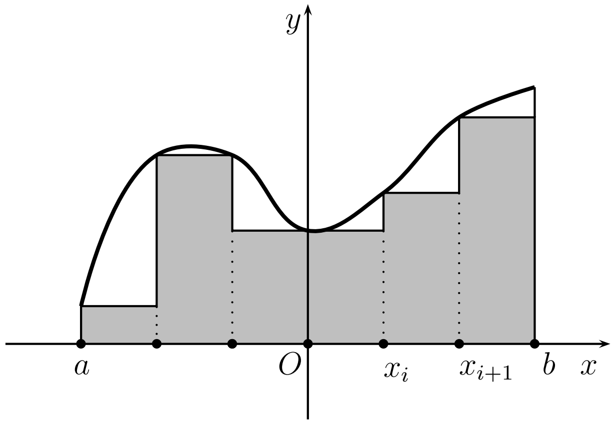

FIGURE 1. Somme inferiori

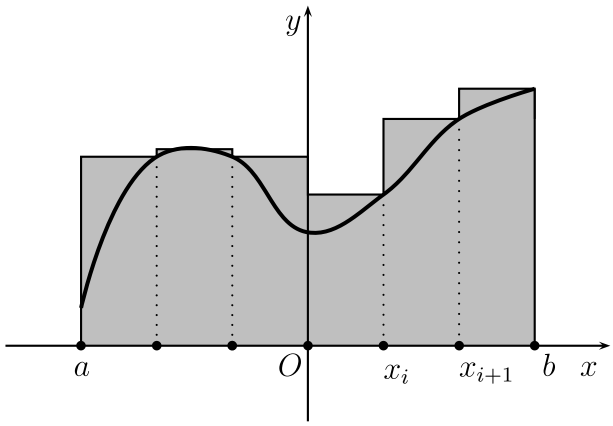

FIGURE 2. Somme superiori

La disuguaglianza (1.37) è la base per la definizione di funzione integrabile.

DEFINIZIONE 1.4 (Funzione Riemann-integrabile). Sia $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione limitata $f : A \to \mathbb{R}$ si dice Riemann-integrabile su A e si scrive $f \in \mathcal{R}(A)$ se

$$\sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f, D) = \inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f, D).$$

In questo caso, il valore comune

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f, D) = \inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f, D)$$

si dice integrale di f su $A = [a, b]$.

Nel caso di funzioni positive l'integrale di Riemann ammette un'interpretazione geometrica come area della regione del piano delimitata dal grafico di f e dall'asse delle x.

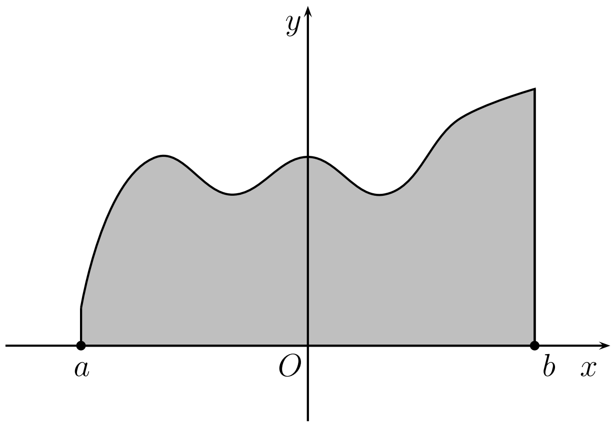

FIGURE 3. Significato geometrico dell'integrale definito

ESEMPIO 1.5 (Funzione di Dirichlet). Esistono funzioni che *non* sono integrabili nel senso di Riemann. Un esempio è la *funzione di Dirichlet*. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

Data una qualsiasi suddivisione $D = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1\}$ dell'intervallo $[0,1]$, posto $A_i = [x_{i-1}, x_i]$ risulta sempre

$$\inf_{x \in A_i} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \sup_{x \in A_i} f(x) = 1.$$

Infatti in ogni A_i ci sono sia punti razionali che punti reali non razionali. Dunque, si ha $s(f,D) = 0$ e $S(f,D) = 1$ per una qualsiasi suddivisione e dunque

$$\sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f,D) = 0 < 1 = \inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f,D).$$

La funzione di Dirichlet non è Riemann-integrabile.

TEOREMA 1.6 (Proprietà generali dell'integrale di Riemann). L'integrale di Riemann gode delle seguenti proprietà:

1) **Linearità**. Se $f, g \in \mathcal{R}(A)$ allora $(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}(A)$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e inoltre
$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$
2) **Monotonia**. Se $f, g \in \mathcal{R}(A)$ e $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in A$ allora
$$\int_a^b f(x) dx \le \int_a^b g(x) dx.$$

3) **Scomposizione del dominio**. Se $f \in \mathcal{R}(A)$ e $A = [a,b] = [a,c] \cup [c,b]$ allora
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$
4) Se $f \in \mathcal{R}(A)$ allora $|f| \in \mathcal{R}(A)$ e inoltre
$$\Big| \int_a^b f(x)dx \Big| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Dim. La dimostrazione di questo teorema è omessa. □

Convenzione (Integrale con segno). Sia $f \in \mathcal{R}([a,b])$ con $a < b$. Definiamo l'integrale di f fra b ed a (in questo ordine, con $b > a$) nel seguente modo
$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

2. Integrabilità delle funzioni continue

In questa sezione vogliamo dimostrare il seguente teorema.

Teorema 2.1 (Integrabilità delle funzioni continue). Sia $A = [a,b]$ un intervallo chiuso e limitato e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua su A. Allora f è Riemann-integrabile in A.

La dimostrazione di questo teorema richiede vari concetti preliminari.

Osservazione 2.2. Come conseguenza del Teorema 2.1 polinomi, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche e iperboliche e loro composizioni sono Riemann-integrabili (su intervalli chiusi e limitati dove sono definite).

Enunciamo senza dimostrazione anche il seguente teorema

Teorema 2.3 (Integrabilità delle funzioni monotone). Sia $A = [a,b]$ un intervallo chiuso e limitato e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione monotona su A (crescente oppure decrescente). Allora f è Riemann-integrabile in A.

2.1. Continuità uniforme.

Definizione 2.4. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice *uniformemente continua su* A se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$|x_1 - x_2| < \delta,\ x_1, x_2 \in A \quad \Rightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \tag{2.38}$$

Osservazione 2.5. Nella continuità uniforme, per ogni ε esiste un δ *uniforme*, cioè indipendente dai punti, tale che sia vera l'implicazione (2.38).

Esempio 2.6. La funzione $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, è continua su A ma NON è uniformemente continua su A.

In effetti, dati $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, esistono $x_1, x_2 \in (0,1]$ tali che $x_1, x_2 \in (0,\delta)$ (e quindi $|x_1 - x_2| < \delta$), tali che
$$\Big| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \Big| \ge \varepsilon.$$

Infatti, si ha
$$\lim_{x\to 0^+}\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x}\right| = \infty.$$

TEOREMA 2.7 (Heine-Cantor). Sia $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato e sia $f : A \to \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua su A. Allora f è uniformemente continua su A.

DIM. La tesi è:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall x, y \in A\ :\ \ |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
Procediamo per assurdo e neghiamo la tesi:
$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \ \exists x, y \in A\ :\ \ |x - y| < \delta \quad \text{ma} \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$
Possiamo riformulare la negazione della tesi nel seguente modo:
$$\exists \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ \exists x_n, y_n \in A\ :\ \ |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{ma} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$
Le successioni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono limitate (perchè A è limitato) e quindi hanno sottosuccessioni convergenti:
$$x_{n_k} \to x_0 \in A \quad k \to \infty$$
$$y_{n_k} \to y_0 \in A \quad k \to \infty,$$
per punti $x_0, y_0 \in A$. Siccome
$$|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \to 0, \quad k \to \infty,$$
deduciamo che $x_0 = y_0$. D'altra parte, abbiamo
$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon > 0, \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N},$$
e per la continuità di f si trova:
$$0 = |f(x_0) - f(y_0)| = \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon > 0.$$
Questo è assurdo. □

2.2. Le funzioni continue sono integrabili.

DIM. DEL TEOREMA 2.1. Fissato $\varepsilon > 0$ proveremo che esiste una suddivisione $D \in \mathcal{D}(A)$ tale che
$$S(f, D) \leq s(f, D) + \varepsilon. \tag{2.39}$$
Da questo fatto segue che
$$\inf_{D\in\mathcal{D}(A)} S(f, D) \leq S(f, D) \leq s(f, D) + \varepsilon \leq \sup_{D\in\mathcal{D}(A)} s(f, D) + \varepsilon.$$
Data l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, si conclude che
$$\inf_{D\in\mathcal{D}(A)} S(f, D) \leq \sup_{D\in\mathcal{D}(A)} s(f, D).$$
Da questa disuguaglianza e dalla disuguaglianza opposta, la proprietà 4) delle somme inferiori e superiori, si deduce che
$$\inf_{D\in\mathcal{D}(A)} S(f, D) = \sup_{D\in\mathcal{D}(A)} s(f, D),$$

ovvero che f è Riemann-integrabile su A.

Dimostriamo la (2.39). Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Dal momento che f è continua su A, allora per il Teorema di Heine-Cantor essa è anche uniformemente continua su A e quindi esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Scegliamo la suddivisione $D = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ in modo tale che $x_i - x_{i-1} < \delta$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$. Dunque se $x, y \in A_i = [x_{i-1}, x_i]$ allora

$$f(x) - f(y) \le |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \text{ovvero} \quad f(x) \le f(y) + \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Si deduce che

$$M_i = \sup_{x \in A_i} f(x) \le \inf_{x \in A_i} f(x) + \frac{\varepsilon}{b-a} = m_i + \frac{\varepsilon}{b-a},$$

e da qui segue

$$\begin{aligned} S(f,D) &= \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^n \left\{ m_i + \frac{\varepsilon}{b-a} \right\} (x_i - x_{i-1}) \\ &= s(f,D) + \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = s(f,D) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Questo prova la (2.39) e quindi il teorema. □

3. Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

In questa sezione dimostriamo il teorema che serve per calcolare gli integrali, il Teorema fondamentale del calcolo integrale. Questo teorema afferma che l'integrazione è l'operazione inversa della derivazione. Per formulare il teorema occorre introdurre due concetti, quello di funzione integrale (di una funzione integrabile) e quello di primitiva (di una funzione data).

Definizione 3.1 (Funzione integrale). Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione Riemann-integrabile. La funzione $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita per ogni $x \in [a,b]$ nel seguente modo

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{3.40}$$

si chiama *funzione integrale* di f.

Definizione 3.2 (Primitiva). Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione (continua). Una funzione $G \in C^1([a,b])$ tale che $G'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$ si dice *primitiva* di f.

Osserviamo che se G è una primitiva di f allora anche $G(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$, è una primitiva di f. Quindi una funzione che ammette una primitiva ne ammette infinite.

Osservazione 3.3. Per non fare confusione, è bene tenere distinti i due concetti di primitiva e di funzione integrale. La funzione integrale è la funzione ben precisa definita dalla formula (3.40).

Abbiamo bisogno di due lemmi preparatori.

LEMMA 3.4 (della Media Integrale). Siano $A = [a, b]$ ed $f \in C(A)$. Allora esiste $\xi \in A$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi).$$

DIM. Osserviamo che per il Teorema di Weierstrass e per le proprietà di monotonia dell'integrale si ha

$$\min_A f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \max_A f.$$

Quindi l'affermazione è una conseguenza del Teorema dei valori intermedi per le funzioni continue. □

LEMMA 3.5. Siano $F, G \in C^1([a, b])$ due funzioni tali che $G'(x) = F'(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Allora la funzione $F - G$ è costante.

DIM. La funzione ausiliaria $H = G - F$ è derivabile e verifica $H'(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$. Siano $x_1, x_2 \in [a, b]$. Per il Teorema di Lagrange esiste un punto ξ compreso fra x_1 e x_2 tale che

$$H(x_1) - H(x_2) = H'(\xi)(x_1 - x_2) = 0.$$

Questo prova che H è costante su $[a, b]$. □

Per il lemma precedente, due primitive di una stessa funzione *su un intervallo* differiscono di una costante.

TEOREMA 3.6 (Fondamentale del calcolo integrale). Sia $f \in C([a, b])$ una funzione continua e sia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ la sua funzione integrale definita in (3.40).

1) Allora F è derivabile in $[a, b]$ ed $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ (cioè F è una primitiva di f).
2) Per ogni primitiva $G \in C^1([a, b])$ di f si ha $F(x) = G(x) - G(a)$, ed in particolare
$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

DIM. Fissiamo $x_0 \in [a, b]$ e consideriamo il rapporto incrementale, per $x \neq x_0$,

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\left\{\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right\} = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la proprietà di scomposizione del dominio per l'integrale di Riemann. Per il Lemma della media integrale per ogni x esiste un punto ξ compreso fra x e x_0 (il punto $\xi = \xi(x)$ dipende da x) tale che

$$\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt = f(\xi(x)).$$

Quando $x \to x_0$ si ha $\xi(x) \to x_0$. Quindi esiste il limite del rapporto incrementale per F per $x \to x_0$ e vale

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0}\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(\xi(x)) = f(x_0).$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la continutà di f. Questo prova l'affermazione 1) del teorema.

Proviamo l'affermazione 2). Le funzioni F e G sono entrambe primitive di f (F lo è per il punto 1), mentre G lo è per ipotesi) e quindi $F'(x) = f(x) = G'(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Dal Lemma 3.5 segue che $F - G$ è costante e quindi $F(x) - G(x) = F(a) - G(a)$. Essendo $F(a) = 0$ si trova

$$F(x) = G(x) - G(a), \quad x \in [a, b].$$

Ricordando la definizione di funzione integrale e valutando l'identità precedente nel punto $x = b$ si trova la tesi.

□

Applicazione del Teorema del Calcolo integrale. Il Teorema fondamentale del calcolo integrale permette di calcolare gli integrali. Data una funzione integranda f, si cerca una primitiva G di f. L'integrale di f è allora

$$\int_a^b f(x)dx = \big[G(x)\big]_{x=a}^{x=b} = G(b) - G(a).$$

Ad esempio, la funzione $f(x) = 1/x$ ha come primitiva $G(x) = \log |x|$ in quanto $G'(x) = 1/x$, e dunque

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \big[\log |x|\big]_{x=1}^{x=2} = \log 2 - \log 1 = \log 2.$$

Analogamente, la funzione $f(x) = \log |x|/x$ ha come primitiva $G(x) = \log^2 |x|/2$ e dunque

$$\int_1^2 \frac{\log x}{x} dx = \Big[\frac{1}{2} \log^2 x\Big]_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{2} \log^2 2.$$

Attenzione. Scrivere

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x} dx = \big[\log |x|\big]_{x=-1}^{x=2} = \log |2| - \log |-1| = \log 2$$

è *sbagliato* perchè la funzione $1/x$ non è integrabile su $[-1, 2]$. Il Teorema fondamentale del calcolo integrale vale per *funzioni integrabili su intervalli.*

Definizione 3.7 (Integrale indefinito). Con l'espressione *integrale indefinito* di una funzione f si indica una generica primitiva di f (definita su un intervallo). L'integrale indefinito di f si indica con il simbolo di integrale senza estremi di integrazione

$$\int f(x)dx.$$

La primitiva dipende in generale da una costante addittiva.

Segue una breve tavola con le primitive delle funzioni elementari.

Funzione	**Primitiva**	**Precisazioni**
x^α	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\alpha \neq -1$
$1/x$	$\log\lvert x\rvert$	$x > 0$ oppure $x < 0$
$e^{\alpha x}$	$\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}$	$\alpha \neq 0$
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\tan x$	$-\log\lvert\cos x\rvert$	$-\pi/2 < x < \pi/2$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$-1 < x < 1$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	

4. Integrazione di funzioni razionali

Una funzione razionale è una funzione del tipo

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dove P e Q sono polinomi. La funzione è ben definita nell'insieme dove $Q(x) \neq 0$. In questa sezione illustriamo il metodo per calcolare gli integrali di funzioni razionali.

4.1. Esempi elementari. Vediamo alcuni semplici esempi di calcolo dell'integrale indefinito di funzioni razionali. Nel seguito omettiamo la costante additiva $+C$ nelle primitive.

Esempio 4.1. $Q(x) = x + k$ con $k \in \mathbb{R}$.

$$\int \frac{1}{x+k}dx = \log|x+k|$$

$$\int \frac{x}{x+k}dx = \int \frac{x+k-k}{x+k}dx = \int \left(1 - \frac{k}{x+k}\right)dx = x - k\log|x+k|$$

$$\int \frac{x^2}{x+k}dx = \int \left(\frac{x(x+k)}{x+k} - \frac{kx}{x+k}\right)dx = \frac{x^2}{2} - kx + k^2\log|x+k|.$$

Esempio 4.2. $Q(x) = x^2 + 1$.

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1)$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = x - \arctan x$$

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}dx = \int \frac{x^3+x-x}{x^2+1}dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(x^2+1).$$

Esempio 4.3. $P(x) = 2ax + b$ e $Q(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx = \log |ax^2 + bx + c|.$$

Esempio 4.4. $P(x) = 1$ e $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Vogliamo calcolare l'integrale

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx, \qquad a, b, c \in \mathbb{R},$$

con $a \neq 0$. Si considera il discriminate $\Delta = b^2 - 4ac$ del polinomio $Q(x)$.

Caso 1: $\Delta < 0$**.** In questo caso, si ha $Q(x) = \alpha\big((\beta x + \gamma)^2 + 1\big)$, con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ da determinare in funzione di a, b, c. Ci si riduce all'integrale

$$\int \frac{1}{\alpha\big((\beta x + \gamma)^2 + 1\big)} dx = \frac{1}{\alpha\beta} \arctan(\beta x + \gamma).$$

Caso 2: $\Delta > 0$**.** In questo caso, si ha $Q(x) = a(x - x_0)(x - x_1)$, con $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ radici (distinte) di Q. Ci si riduce all'integrale

$$\int \frac{1}{a(x - x_0)(x - x_1)} dx = \frac{1}{a(x_0 - x_1)} \log \left| \frac{x - x_0}{x - x_1} \right|,$$

che si calcola col metodo dei fratti semplici.

Caso 3: $\Delta = 0$**.** In questo caso, si ha $Q(x) = a(x - x_0)^2$, con $x_0 \in \mathbb{R}$ radice doppia di Q. Ci si riduce all'integrale

$$\int \frac{1}{a(x - x_0)^2} dx = -\frac{1}{a(x - x_0)}.$$

Esempio 4.5. Calcolare l'integrale

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1 - x^2} dx.$$

Soluzione. Il polinomio $Q(x) = 1 - x^2$ ha due radici reali distinte. Scomponiamo la funzione integranda come segue:

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{A}{1 + x} + \frac{B}{1 - x},$$

dove A e B sono numeri reali da determinare. Osserviamo che

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{A}{1 + x} + \frac{B}{1 - x} = \frac{(A + B) + (A - B)x}{1 - x^2}.$$

Per avere uguaglianza deve essere $1 = (A + B) + (A - B)x$, e quindi

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Possiamo allora calcolare l'integrale di partenza nel seguente modo

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx = \\ &= \frac{1}{2}\Big[\log|1+x| - \log|1-x|\Big]_{x=-1/2}^{x=1/2} = \\ &= \frac{1}{2}\Big[\log\frac{|1+x|}{|1-x|}\Big]_{x=-1/2}^{x=1/2} = \frac{\log 3}{2}. \end{aligned}$$

Esempio 4.6. Calcolare l'integrale

$$I = \int_{-1/2}^{1} \frac{1}{x^2+x+1}dx.$$

Soluzione. Il polinomio al denominatore ha discriminante $\Delta = -3$ e quindi è sempre positivo. Completiamo il quadrato relativamente ai primi due addendi

$$x^2+x+1 = \left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+1-\frac{1}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} = \frac{3}{4}\Big[\Big(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)^2+1\Big].$$

Quindi si deve calcolare l'integrale

$$I = \frac{4}{3}\int_{-1/2}^{1}\frac{1}{\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\Big[\arctan\Big(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)\Big]_{x=-1/2}^{x=1} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi.$$

Esempio 4.7. Calcolare l'integrale

$$I = \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2+3x+2}dx.$$

Soluzione. Il polinomio al denominatore ha due radici semplici $x = -1$ e $x = -2$. Scomponiamo la funzione integranda nel seguente modo

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}.$$

dove A e B sono numeri reali da determinare. Osserviamo che

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2} = \frac{(2A+B)+(A+B)x}{x^2+x+1}.$$

Per avere l'uguaglianza deve essere $1 = (2A+B)+(A+B)x$ e quindi

$$\begin{cases} 2A+B=1 \\ A+B=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=+1 \\ B=-1. \end{cases}$$

Possiamo allora calcolare l'integrale di partenza

$$I = \int_{-1/2}^{1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \log\frac{4}{3},$$

dove i calcoli intermedi sono lasciati al lettore come esercizio.

4.2. Decomposizione in fratti semplici. Siano $P(x)$ e $Q(x)$ due polinomi. Vogliamo calcolare l'integrale

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

Passo 1. Se P ha grado strettamente minore del grado di Q si procede direttamente al Passo 2. Se P ha grado maggiore o uguale al grado di Q, si esegue una divisione di polinomi:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{Q(x)} + S(x),$$

dove R, il resto della divisione, è un polinomio con grado strettamente minore del grado di Q, ed S è il quoziente della divisione, un polinomio che sappiamo integrare.

Passo 2. A questo punto supponiamo direttamente che P abbia grado strettamente minore del grado di Q. Si scompone Q in un prodotto di fattori irriducibili e si procede come nel seguente esempio.

Supponiamo che sia $P(x) = 1$ e $Q(x) = x^4 - x^3$. I fattori irriducibili del polinomio Q sono x^3 e $x - 1$, infatti $Q(x) = x^3(x - 1)$. Il quoziente $P/Q = 1/Q$ si scompone in una somma di frazioni algebriche come segue

$$\frac{1}{x^3(x-1)} = \frac{A + Bx + Cx^2}{x^3} + \frac{D}{x-1}.$$

Avremo tante frazioni (i "fratti semplici") quanti sono i fattori irriducibili. I fattori irriducibili appaiono al denominatore di ciascun "fratto semplice". Al numeratore si scrive un generico polinomio di grado pari al grado del denominatore diminuito di 1.

Le costanti reali A, B C e D si determinano nel seguente modo. Eseguendo le somme algebriche si trova l'identità

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3(x-1)} &= \frac{A + Bx + Cx^2}{x^3} + \frac{D}{x-1} = \\ &= \frac{(C + D)x^3 + (B - C)x^2 + (A - B)x - A}{x^2 + x + 1}. \end{aligned}$$

Confrontando i numeratori si trova l'equazione

$$1 = (C + D)x^3 + (B - C)x^2 + (A - B)x - A.$$

Quindi, per il principio di identità dei polinomi, si arriva al sistema

$$\begin{cases} C + D = 0 \\ B - C = 0 \\ A - B = 0 \\ -A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -1 \\ C = -1 \\ D = 1. \end{cases}$$

Esempio 4.8. Calcolare l'integrale

$$I = \int_2^3 \frac{1}{x^3(x-1)} dx.$$

Soluzione. Usando la decomposizione in fattori semplici, si trova

$$I = \int_2^3 \Big(\frac{-1 - x - x^2}{x^3} + \frac{1}{x-1} \Big) dx = \int_2^3 \Big(-x^{-3} - x^{-2} - x^{-1} + \frac{1}{x-1} \Big) dx.$$

Il risultato è $I = 17/72 + \log 3/4$ e i calcoli intermedi sono lasciati al lettore per esercizio.

5. Integrazione per parti e per sostituzione

In questo paragrafo esaminiamo due tecniche per il calcolo di integrali.

5.1. Integrazione per parti.

TEOREMA 5.1. Siano $f, g \in C^1([a,b])$, allora si ha la formula di integrazione per parti

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \big[f(x)g(x)\big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

DIM. Per la regola di derivazione del prodotto di funzioni abbiamo

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

per ogni $x \in (a,b)$. Integrando su $[a,b]$ e utilizzando il Teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\big[f(x)g(x)\big]_{x=a}^{x=b} = \int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Riordinando tale identità si ottiene la tesi.

□

ESEMPIO 5.2. Esempi di integrazione per parti:

$$\int_0^1 xe^x dx = \big[xe^x\big]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 e^x dx = e - \big[e^x\big]_{x=0}^{x=1} = 1,$$

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x dx = \big[-x\cos x\big]_{x=0}^{x=\pi/2} + \int_0^1 \cos x dx = \big[\sin x\big]_{x=0}^{x=\pi/2} = 1,$$

$$\int_1^{\mathrm{e}} x \log x dx = \Big[\frac{x^2}{2}\log x\Big]_{x=1}^{x=\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2}dx = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4},$$

$$\int_0^1 \arctan x dx = \big[x\arctan x\big]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\log 2}{2}.$$

5.2. Integrazione per sostituzione.

TEOREMA 5.3. Sia $\varphi \colon [y_0, y_1] \to [x_0, x_1]$ una funzione derivabile con derivata continua e tale che $\varphi(y_0) = x_0$ e $\varphi(y_1) = x_1$. Sia poi $f \colon [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora si ha la formula di integrazione per sostituzione

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_{y_0}^{y_1} f(\varphi(y))\varphi'(y)dy.$$

Formalmente, si pone $x = \varphi(y)$, si cambiano gli estremi di integrazione in modo corrispondente e si sostituisce $dx = \varphi'(y)dy$.

Dim. Per $y \in [y_0, y_1]$ consideriamo la funzione $H : [y_0, y_1] \to \mathbb{R}$

$$H(y) = \int_{x_0}^{\varphi(y)} f(x)dx = \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y)} f(x)dx = F(\varphi(y)),$$

dove F è la funzione integrale di f, ossia

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Allora, per il teorema di derivazione della funzione composta si ha

$$H'(y) = F'(\varphi(y))\varphi'(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y).$$

Abbiamo usato il Teorema fondamentale del calcolo integrale per dire che $F' = f$. Integrando in y l'identità precedente si ottiene

$$\int_{y_0}^{y_1} H'(y)dy = \int_{y_0}^{y_1} f(\varphi(y))\varphi'(y)dy.$$

Usando di nuovo il Teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha

$$\int_{y_0}^{y_1} H'(y)dy = H(y_1) - H(y_0) = \int_{x_0}^{\varphi(y_1)} f(x)dx - \int_{x_0}^{\varphi(y_0)} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx.$$

La formula di integrazione per sostituzione segue.

$\square$

Esempio 5.4. Calcolare l'integrale

$$I = \int_1^2 \frac{x+3}{x\sqrt{x+2}}dx.$$

Soluzione. Utilizziamo il teorema di integrazione per sostituzione. Conviene porre

$$y = \sqrt{x+2}, \quad x = y^2 - 2, \quad dx = 2ydy.$$

Gli estremi di integrazione di trasformano nel seguente modo: $x = 1 \Rightarrow y = \sqrt{3}$ e $x = 2 \Rightarrow y = 4$. Dunque si ha

$$I = \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{y^2+1}{y(y^2-2)}2ydy = 2\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{y^2+1}{y^2-2}dy.$$

Abbiamo l'integrale di una funzione razionale. Il grado del polinomio al numeratore e al denominatore sono uguali e quindi dobbiamo fare una divisione di polinomi. Alternativamente, possiamo decomporre la funzione razionale come segue

$$\frac{y^2+1}{y^2-2} = \frac{y^2-2+3}{y^2-2} = 1 + \frac{3}{y^2-2}.$$

Allora si tratta di calcolare l'integrale

$$I = 2\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{y^2+1}{y^2-2}dy = 2(2-\sqrt{3}) + 6\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{1}{y^2-2}dy.$$

L'integrale

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{1}{y^2-2}dy$$

si calcola con la tecnica dei fratti semplici ed omettiamo i dettagli.

Esempio 5.5. Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

Soluzione. Utilizziamo il teorema di integrazione per sostituzione. Conviene porre

$$x = \sin t, \quad t = \arcsin x, \quad dx = \cos t dt.$$

Gli estremi di integrazione si trasformano nel seguente modo: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, e $x = 1 \Rightarrow t = \pi/2$. Dunque

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt.$$

Ora

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\big[\sin 2t\big]_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Non è difficile verificare la correttezza del calcolo se si ricorda che I corrisponde all'area di un quarto di cerchio unitario.

5.3. Sostituzioni parametriche. Supponiamo di dover integrare una funzione data da un quoziente di due espressioni trigonometriche dove appaiono le funzioni $\sin x$ e $\cos x$. Attraverso le formule parametriche ci si può ricondurre all'integrale di una funzione razionale. Illustriamo il procedimento tramite un esempio.

Esempio 5.6. Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

Soluzione. Si pone $t = \tan(x/2)$. Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ si trasformano nel seguente modo

$$\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Inoltre, dalla relazione $x = 2\arctan(x)$ si ottiene la regola per trasformare il "differenziale"

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Nell'integrale in esame, gli estremi di integrazione si trasformano nel seguente modo: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, e $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$. Quindi si trova

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2t}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{2tdt}{1+2t-t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\log(2\sqrt{2}+3) - \log 2.$$

Il calcolo dell'integrale della funzione razionale si lascia per esercizio.

6. Integrali impropri

Esistono integrali impropri (generalizzati) di due tipi: 1) Integrali di funzioni su *intervalli non limitati*; 2) Integrali di *funzioni non limitate* su intervallo limitato.

6.1. Integrali impropri su intervallo illimitato.

DEFINIZIONE 6.1. Sia $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Diciamo che f è integrabile in senso improprio su $[a,\infty)$ se esiste finito il limite

$$\lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx.$$

In questo caso, chiamiamo l'integrale sulla destra *integrale improprio di* f su $[a,\infty)$ e diciamo che l'integrale improprio *converge.*

ESEMPIO 6.2. Calcolare l'integrale improprio

$$I = \int_4^\infty \frac{1}{x(\sqrt{x}-1)}dx.$$

Soluzione. Calcoliamo innanzitutto per ogni $M > 4$ l'integrale

$$\int_4^M \frac{1}{x(\sqrt{x}-1)}dx.$$

Utilizziamo il teorema di integrazione per sostituzione. Si pone $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2$, $dx = 2ydy$. Gli estremi di integrazione si trasformano in questo modo: $x = 4 \Rightarrow y = 2$, $x = M \Rightarrow y = \sqrt{M}$. Dunque, si trova

$$\int_4^M \frac{1}{x(\sqrt{x}-1)}dx = 2\int_2^{\sqrt{M}} \frac{1}{y(y-1)}dy.$$

Decomponendo in fratti semplici si ha

$$2\int_2^{\sqrt{M}} \frac{1}{y(y-1)}dy = -2\int_2^{\sqrt{M}} \frac{dy}{y} + 2\int_2^{\sqrt{M}} \frac{dy}{y-1} = 2\Big(\log\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} + \log 2\Big).$$

In conclusione, passando al limite per $M \to \infty$

$$I = \lim_{M\to\infty} 2\Big(\log\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} + \log 2\Big) = 2\log 2.$$

L'integrale improprio converge e ne abbiamo calcolato il valore esatto.

ESEMPIO 6.3 (Fondamentale). Studiamo la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro reale $\alpha > 0$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx.$$

Nel caso $\alpha \neq 1$ si ha

$$\int_1^M \frac{1}{x^\alpha}dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{x=1}^{x=M} = \frac{M^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}.$$

Concludiamo che:

1) Se $\alpha > 1$ l'integrale converge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{M\to\infty}\frac{M^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$$

2) Se $0 < \alpha < 1$ l'integrale diverge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{M\to\infty} \frac{M^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \infty.$$

Nel caso $\alpha = 1$ si ha

$$\int_1^M \frac{1}{x} dx = \log M,$$

e quindi l'integrale diverge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{M\to\infty} \log M = \infty.$$

Riassumendo abbiamo la seguente situazione

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1} & \alpha > 1, \\ \infty & 0 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Teorema 6.4 (Criterio del confronto). Siano $f, g \in C([a,\infty))$ due funzioni continue tali che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \geq M$, per qualche $M > a$. Allora:

1) $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^\infty f(x)dx < \infty;$
2) $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx = \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^\infty g(x)dx = \infty.$

La dimostrazione è analoga a quella per le serie numeriche ed è omessa.

Definizione 6.5 (Ordine di infinitesimo per $x \to \infty$). Una funzione $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ si dice infinitesima di ordine $\alpha > 0$ rispetto ad $1/x$ per $x \to \infty$ se esiste finito e diverso da zero il limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = L \neq 0.$$

Dall'Esempio 6.3, tramite confronto deriva il seguente criterio di convergenza per integrali impropri.

Teorema 6.6 (Criterio del confronto asintotico). Sia $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, infinitesima di ordine $\alpha > 0$ rispetto ad $1/x$ per $x \to \infty$. Allora:

1) Se $\alpha > 1$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ converge;
2) se $\alpha \leq 1$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.

Dim. Dimostriamo l'affermazione 1). Supponiamo ad esempio che sia

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = L > 0.$$

Dunque esiste un numero $M > 0$ tale che

$$0 \leq f(x) \leq \frac{2L}{x^\alpha}$$

per ogni $x \geq M$. Siccome l'integrale imporprio

$$\int_1^\infty \frac{2L}{x^\alpha} dx$$

converge per $\alpha > 1$, il risultato segue dal Teorema del confronto. La dimostrazione dell'affermazione 2) è analoga. $\square$

Esempio 6.7. Al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri l'integrale improprio

$$I_\alpha = \int_1^\infty \frac{x^\alpha}{1+1/x} \log\Big(1+\frac{1}{x}\Big) dx.$$

1) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che l'integrale improprio risulti convergente.
2) Calcolare I_α per $\alpha = -2$.

Soluzione. 1) Per rispondere alla prima domanda osserviamo in primo luogo che

$$\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big) = \frac{1}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big), \quad x \to \infty,$$

dove $o(1/x)$ indica una quantità che converge a zero più velocemente di $1/x$ quando $x \to \infty$. Dunque, la funzione integranda è

$$\frac{x^\alpha}{1+1/x} \log\Big(1+\frac{1}{x}\Big) = \frac{1}{x^{1-\alpha}}(1+o(1)),$$

dove $o(1)$ indica una quantità infinitesima al tendere di $x \to \infty$. Dunque la funzione integranda è infinitesima di ordine $1-\alpha$ rispetto ad $1/x$. Per il *Criterio del confronto asintotico*, l'integrale converge se solo se

$$1 - \alpha > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 0.$$

2) Quando $\alpha = -2$ l'integrale imporprio converge. Per calcolarlo osserviamo che

$$\frac{d}{dx} \log^2\Big(1+\frac{1}{x}\Big) = 2\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big) \cdot \frac{-x^{-2}}{1+1/x},$$

e quindi

$$\int_1^\infty \frac{x^{-2}}{1+1/x} \log\Big(1+\frac{1}{x}\Big) dx = \lim_{M\to\infty} \Big[-\frac{1}{2}\log^2\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big]_{x=1}^{x=M} = \frac{1}{2}\log^2 2.$$

La primitiva si può anche determinare tramite una serie di sostituzioni.

6.2. Integrali impropri di funzioni non limitate. Discutiamo ora il caso di integrali impropri di funzioni non limitate.

Definizione 6.8. Sia $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua (non necessariamente limitata intorno all'estremo a). Diciamo che f è integrabile in senso improprio su $(a,b]$ se esiste finito il limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

In questo caso, diciamo che l'integrale improprio a destra *converge*.

Esempio 6.9 (Fondamentale). Studiamo la convergenza del seguente integrale improprio a variare di $\alpha > 0$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

Nel caso $\alpha \neq 1$ si ha

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{x=\varepsilon}^{x=1} = \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Da ciò concludiamo che:

1) Se $\alpha > 1$ l'integrale diverge

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \infty$$

2) Se $0 < \alpha < 1$ l'integrale converge

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Nel caso $\alpha = 1$ si ha

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx = -\log \varepsilon$$

e quindi l'integrale diverge

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \log \varepsilon = \infty.$$

Riassumendo, abbiamo la seguente situazione

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \infty, & \alpha \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}, & 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Definizione 6.10 (Ordine di infinito per $x \to 0^+$). Diciamo che una funzione continua $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ ha ordine di infinito $\alpha > 0$ rispetto ad $1/x$ per $x \to 0^+$ se esiste finito

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x \to 0^+} x^\alpha f(x) = L \neq 0.$$

Per discutere la convergenza di integrali di funzioni non limitate è utile il seguente strumento.

Teorema 6.11 (Criterio del confronto asintotico). Sia $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua con ordine di infinito $\alpha > 0$ rispetto ad $1/x$ per $x \to 0^+$. Allora:

1) Se $\alpha \geq 1$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ diverge.

2) Se $0 < \alpha < 1$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ converge.

Dim. La dimostrazione segue per confronto con $1/x^\alpha$ ed è omessa. $\square$

ESEMPIO 6.12. Studiare la convergenza del seguente integrale improprio
$$\int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin x}\log\left(\frac{\pi+x}{2\pi}\right)}{(\pi-x)^2}dx.$$

Soluzione. Osserviamo che la funzione integranda non è definita per $x=\pi$ mentre è definita e continua in $[0,\pi)$. Per comodità operiamo il cambiamento di variabile $y=\pi-x, dx=-dy$ ottenendo
$$\int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin x}\log\left(\frac{\pi+x}{2\pi}\right)}{(\pi-x)^2}dx = \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin y}\log\left(1-\frac{y}{2\pi}\right)}{y^2}dy.$$
Per $y\to 0^+$ si hanno gli sviluppi
$$\sin y = y + o(y) \qquad \log\left(1-\frac{y}{2\pi}\right) = -\frac{y}{2\pi} + o(y),$$
dove $o(y)$ indica una quantità che tende a 0 più velocemente di y. Dunque, la funzione integranda è
$$\frac{\sqrt{\sin y}\log\left(1-\frac{y}{2\pi}\right)}{y^2} = \frac{y\big(-\frac{1}{2\pi}+o(1)\big)\sqrt{y}(1+o(1))}{y^2} = \frac{-\frac{1}{2\pi}+o(1)}{y^{1/2}}.$$
La funzione integranda ha ordine di infinito $1/2$ rispetto ad $1/y$ per $y\to 0^+$. Siccome $1/2<1$ l'integrale improprio converge.