1 Temi d'esame 2012 e 2013 (a cura di G. Colombo)

NOTA: sia $\ln$ che $\log$ indicano il logaritmo in base e.

1.1 2012, Area dell'Ingegneria dell'Informazione, Canali 1 e 4

Appello del 7.02.2012

TEMA 1

Esercizio 1 [9 punti] Data la funzione

$$f(x) = \int_{-1}^{x} \frac{\arctan 3t}{t} dt,$$

(a) dimostrare che il dominio è $\mathbb{R}$, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) studiarne concavità e convessità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \cos \ln x + \cos \arctan x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\ln(1+x^2) - \sin x^2}$$

Esercizio 3 [7 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}}\, dx.$$

Esercizio 4 [5 punti] Risolvere l'equazione

$$i\,\mathrm{Re} z + z^2 = |z|^2 - 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Esercizio 5 [facoltativo] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile tre volte e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$. Si dimostri che x_0 è un punto di flesso per f.

TEMA 2

Esercizio 1 [9 punti] Data la funzione

$$f(x) = \int_{2}^{x} \frac{\arctan 2t}{t} dt,$$

(a) dimostrare che il dominio è $\mathbb{R}$, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;

(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) studiarne concavità e convessità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \ln x + \cos \sin 2x - e^{-2x^2}}{\ln(1-x^2) + \arctan x^2}$$

Esercizio 3 [7 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_0^9 \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}\, dx.$$

Esercizio 4 [5 punti] Risolvere l'equazione

$$i\, \mathrm{Im} z + z^2 = |z|^2 - 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

TEMA 3

Esercizio 1 [9 punti] Data la funzione

$$f(x) = \int_{-2}^{x} \frac{\arctan 2t}{t} dt,$$

(a) dimostrare che il dominio è $\mathbb{R}$, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) studiarne concavità e convessità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \cos \ln x^2 - \cos \sinh 2x + e^{-2x^2}}{\ln(1+x^2) - \tan x^2}$$

Esercizio 3 [7 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_1^{16} \frac{e^{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt[4]{x}}\, dx.$$

Esercizio 4 [5 punti] Risolvere l'equazione

$$i\, \mathrm{Re} z - z^2 + 1 = |z|^2$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

TEMA 4

%bigskip
Esercizio 1 [9 punti] Data la funzione

$$f(x) = \int_1^x \frac{\arctan 3t}{t} dt,$$

(a) dimostrare che il dominio è $\mathbb{R}$, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) studiarne concavità e convessità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \ln x - \cos \tan x + e^{-\frac{x^2}{2}}}{\ln(1-x^2) + \sinh x^2}$$

Esercizio 3 [7 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_1^{27} e^{\sqrt[3]{x}}\, dx.$$

Esercizio 4 [5 punti] Risolvere l'equazione

$$i\,\mathrm{Im} z - z^2 + 1 = |z|^2$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Appello del 23.02.2012

TEMA 1

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = 2\sqrt{|x^2-4|} - |x| + 1$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e studiarne la convessità e la concavità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [9 punti] Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left|\alpha - 1\right|^n \frac{n!}{(n+1)! - n! + 1}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^{2x} + 2e^x + 2},$$

(a) se ne calcoli una primitiva;
(b) si provi che l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente e lo si calcoli.

Esercizio 4 [4 punti] Si esprimano in forma algebrica gli zeri del polinomio

$$\big(z^2 + iz + 2\big)\big(z^3 - 8i\big).$$

Esercizio 5 [facoltativo] Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{n^2}}{(n!)^{\alpha n}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{N}$.

TEMA 2

%bigskip

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = 2\sqrt{|x^2 - 9|} - |x| + 2$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e studiarne la convessità e la concavità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [9 punti] Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \big|\alpha + 1\big|^n \frac{(n-1)!}{n! - (n-1)! + 2}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 2e^x + 2},$$

(a) se ne calcoli una primitiva;
(b) si provi che l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente e lo si calcoli.

Esercizio 4 [4 punti] Si esprimano in forma algebrica gli zeri del polinomio

$$\big(z^2 - 3iz - 2\big)\big(z^3 + 8i\big).$$

TEMA 3

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = 3|x| - 4\sqrt{|x^2 - 1|} - 2$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e studiarne la convessità e la concavità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [9 punti] Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \big|\alpha - 2\big|^n \frac{(n-1)!}{n! - (n-1)! + 4}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^{2x} + 2e^x + 2},$$

(a) se ne calcoli una primitiva;
(b) si provi che l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ è convergente e lo si calcoli.

Esercizio 4 [4 punti] Si esprimano in forma algebrica gli zeri del polinomio

$$\big(z^2 + 3iz - 2\big)\big(z^3 - 27i\big).$$

Esercizio 5 [facoltativo] Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{n^2}}{(n!)^{\alpha n}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{N}$.

TEMA 4

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = 2|x| - 3\sqrt{|x^2 - 2|} - 1$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e studiarne la convessità e la concavità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [9 punti] Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \big|\alpha + 2\big|^n \frac{n!}{(n+1)! - n! + 3}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^{2x} - 2e^x + 2},$$

(a) se ne calcoli una primitiva;
(b) si provi che l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente e lo si calcoli.

Esercizio 4 [4 punti] Si esprimano in forma algebrica gli zeri del polinomio

$$\big(z^2 - iz + 2\big)\big(z^3 + 27i\big).$$

Appello del 17.07.2012

TEMA 1

Esercizio 1 [9 punti] Data la funzione

$$f(x) = \left|\frac{x-2}{x+3}\right| \mathrm{e}^{|x-2|}$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, calcolarne i limiti agli estremi del dominio e determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e dimostrare che esiste $M > 0$ tale che $f''(x) > 0$ se $|x| > M$;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [8 punti] Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) - \sin\frac{1}{2x^2} - e^{-x}}{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \arctan\frac{1}{x^2}}.$$

Esercizio 3 [10 punti] (a) Calcolare l'ordine di infinito per $x \to 3$ della funzione

$$g(x) = \frac{x}{9 - x^2};$$

b) dire per quali $\alpha \geq 0$ converge l'integrale

$$I = \int_0^3 \frac{x}{\left(9 - x^2\right)^\alpha}dx;$$

c) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4 [5 punti] Risolvere l'equazione

$$|z + 2i| = \Big||z| - 2\Big|$$

e disegnarne le soluzioni sul piano complesso.

TEMA 2

Esercizio 1 [9 punti] Data la funzione

$$f(x) = \left|\frac{x+2}{x-3}\right| e^{|x+2|}$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, calcolarne i limiti agli estremi del dominio e determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e dimostrare che esiste $M > 0$ tale che $f''(x) > 0$ se $|x| > M$;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [8 punti] Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x} + \sin\left(\cos\frac{1}{x} - 1\right) + \arctan\frac{1}{2x^2}}{\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \sin\frac{1}{x^2}}.$$

Esercizio 3 [10 punti] (a) Calcolare l'ordine di infinito per $x \to 2$ della funzione

$$g(x) = \frac{x}{4 - x^2};$$

b) dire per quali $\alpha \geq 0$ converge l'integrale

$$I = \int_0^2 \frac{x}{\left(4 - x^2\right)^\alpha} dx;$$

c) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4 [5 punti] Risolvere l'equazione

$$|z - 3i| = \Big||z| - 3\Big|$$

e disegnarne le soluzioni sul piano complesso.

Appello del 18.09.2012

TEMA 1

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \ln\cosh x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sinh x|$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, calcolarne i limiti agli estremi del dominio e determinarne gli eventuali asintoti; provare che $f(x) > 0$ se e solo se $x < \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{2}$;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(c) studiarne concavità e convessità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [9 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\Big[e^{-n}\sin n + \cos\sin\frac{1}{n} - e^{\frac{-1}{2n^2}} + \frac{1}{12}\frac{1}{n^4}\Big]^{\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [8 punti] Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 27}{\left(\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}\right)^2},$$

si calcoli una primitiva di f (sugg.: effettuare la sostituzione $x = t^6$).

Esercizio 4 [5 punti] Esprimere in forma algebrica le soluzioni dell'equazione

$$z^6 - iz^3 + 2 = 0$$

e rappresentarle sul piano di Gauss.

TEMA 2

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \ln\cosh x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sinh x|$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, calcolarne i limiti agli estremi del dominio e determinarne gli eventuali asintoti; provare che $f(x) > 0$ se e solo se $x > \frac{\ln(-2+\sqrt{5})}{2}$;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(c) studiarne concavità e convessità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Esercizio 2 [9 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\Big[\frac{1}{12}\frac{1}{n^4} + \cosh\sinh\frac{1}{n} - e^{\frac{1}{2n^2}} - e^{-2n}\cos n\Big]^{\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [8 punti] Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 8}{\left(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}\right)^2},$$

si calcoli una primitiva di f (sugg.: effettuare la sostituzione $x = t^6$).

Esercizio 4 [5 punti] Esprimere in forma algebrica le soluzioni dell'equazione

$$z^6 + 2iz^3 + 3 = 0$$

e rappresentarne le soluzioni sul piano di Gauss.

1.2 2013, Area dell'Ingegneria dell'Informazione, tutti i canali

Appello del 5.02.2013

TEMA 1

Esercizio 1 [10 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \arcsin \sqrt{1 - 2\log^2 x}.$$

1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.
2) Discutere brevemente la continuità e la derivabilità di f.
3) Calcolare f', determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di estremo.
4) Calcolare i limiti significativi di f'.
5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [8 punti] Al variare di $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{4x}{1+x^2} \right)^n.$$

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 8}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x + 1}}{e^x - 3}\, dx.$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{2z+1}{2z-1} \right)^3 = 1,$$

scriverle in forma algebrica e rappresentarle nel piano complesso.

Esercizio 5 [facoltativo] Sia $f \in C([0,1])$ una funzione continua. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx.$$

TEMA 2

Esercizio 1 [10 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \arcsin \sqrt{1 - \frac{\log^2 x}{2}}.$$

1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.

2) Discutere brevemente la continuità e la derivabilità di f.

3) Calcolare f', determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di estremo.

4) Calcolare i limiti significativi di f'.

5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [8 punti] Al variare di $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{-8x}{4+x^2} \right)^n.$$

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}\, dx.$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{2z+1}{1-2z} \right)^3 = -1,$$

scriverle in forma algebrica e rappresentarle nel piano complesso.

TEMA 3

Esercizio 1 [10 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{1 - 2\log^2 x}.$$

1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.

2) Discutere brevemente la continuità e la derivabilità di f.

3) Calcolare f', determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di estremo.

4) Calcolare i limiti significativi di f'.

5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [8 punti] Al variare di $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{12x}{9+x^2} \right)^n.$$

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 5}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x+4}}{e^x+5}\,dx.$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{3z+1}{3z-1}\right)^3 = 1,$$

scriverle in forma algebrica e rappresentarle nel piano complesso.

TEMA 4

Esercizio 1 [10 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{1 - \frac{\log^2 x}{3}}.$$

1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.
2) Discutere brevemente la continuità e la derivabilità di f.
3) Calcolare f', determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di estremo.
4) Calcolare i limiti significativi di f'.
5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [8 punti] Al variare di $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{-4x}{1+x^2}\right)^n.$$

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 8}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x-4}}{e^x-5}\,dx.$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{3z+1}{1-3z}\right)^3 = 1,$$

scriverle in forma algebrica e rappresentarle nel piano complesso.

Appello del 20.02.2013

TEMA 1

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = x\left|3 + \frac{1}{\log(2x)}\right|,$$

(a) determinarne il dominio, calcolarne i limiti agli estremi e determinare eventuali asintoti;
(b) studiarne la prolungabilità agli estremi del dominio e la derivabilità;
(c) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(d) calcolare i limiti significativi di f';
(e) disegnarne un grafico qualitativo di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [10 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{7/2}\,\log^2 x - 1 + \sin x^2 + \cos\left(1 - e^{\sqrt{2}\,x}\right)}{\sinh x - x^\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 3 [8 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \sin\frac{1}{x}\, dx$$

Esercizio 4 [5 punti] Risolvere l'equazione

$$\left|z^2\left(z - \overline{(z-4i)}\right)\right| = \left|z\overline{z} - z(z-4i)\right|$$

e disegnare le soluzioni nel piano complesso.

Esercizio 5 [facoltativo] Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua e crescente. Sia

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt, \quad x > 0.$$

Si provi che g è crescente.

TEMA 2

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = x\left|2 - \frac{1}{\log(3x)}\right|,$$

(a) determinarne il dominio, calcolarne i limiti agli estremi e determinare eventuali asintoti;
(b) studiarne la prolungabilità agli estremi del dominio e la derivabilità;
(c) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(d) calcolare i limiti significativi di f';

(e) disegnarne un grafico qualitativo di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [10 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x^2 + \cos\log(1+\sqrt{2}\,x) - 1 + x^{13/4}\,\log^2 x}{\sin x - x^\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 3 [8 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \cos\frac{1}{x}\, dx$$

Esercizio 4 [5 punti] Risolvere l'equazione

$$\left|z^2\big(z - \overline{(z-2i)}\big)\right| = \left|z\overline{z} - z(z-2i)\right|$$

e disegnare le soluzioni nel piano complesso.

TEMA 3

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = x\left|6 + \frac{1}{\log(4x)}\right|,$$

(a) determinarne il dominio, calcolarne i limiti agli estremi e determinare eventuali asintoti;
(b) studiarne la prolungabilità agli estremi del dominio e la derivabilità;
(c) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(d) calcolare i limiti significativi di f';
(e) disegnarne un grafico qualitativo di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [10 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{10/3}\,\log^3 x + \cosh(e^{\sqrt{2}\,x} - 1) - 1 - \sin x^2}{x^\alpha - \sin x}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 3 [8 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4}\, dx$$

Esercizio 4 [5 punti] Risolvere l'equazione

$$\left|z^2\big(\overline{(z+4i)} - z\big)\right| = \left|z(z+4i) - z\overline{z}\right|$$

e disegnare le soluzioni nel piano complesso.

Esercizio 5 [facoltativo] Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua e crescente. Sia

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt, \quad x > 0.$$

Si provi che g è crescente.

TEMA 4

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = x\left|6 - \frac{1}{\log x}\right|,$$

(a) determinarne il dominio, calcolarne i limiti agli estremi e determinare eventuali asintoti;
(b) studiarne la prolungabilità agli estremi del dominio e la derivabilità;
(c) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(d) calcolare i limiti significativi di f';
(e) disegnarne un grafico qualitativo di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [10 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{15/4}\,\log^3 x - \sinh x^2 + \cosh\log(1-\sqrt{2}\,x) - 1}{x^\alpha - \arctan x}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 3 [8 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}\sinh\frac{1}{x}\,dx$$

Esercizio 4 [5 punti] Risolvere l'equazione

$$\left|z^2\big(z - \overline{(z+2i)}\big)\right| = \left|z\bar{z} - z(z+2i)\right|$$

e disegnare le soluzioni nel piano complesso.

Appello del 15.07.2013

TEMA 1

Esercizio 1 [10 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\cosh x - \log|\sinh x - 1|.$$

1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.

2) Calcolare i limiti significativi e gli eventuali asintoti di f.

3) Calcolare f', determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo o minimo relativi o assoluti.

4) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [8 punti]
a) Dato il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0, \tag{1}$$

calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2 + \log(n!) + \cos n\right) \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) \log(n+1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \log(n-1)\right).$$

b) [FACOLTATIVO] Dimostrare (1).

Esercizio 3 [9 punti]
a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2\alpha x} - 1}{e^{2x} + 1} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) Calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^5 = -16\overline{z}$$

esprimendole prima in forma trigonometrica/esponenziale e poi in forma algebrica; disegnarle infine sul piano di Gauss.

TEMA 2

Esercizio 1 [10 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log|\sinh x - 2| - \log\cosh x.$$

1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.

2) Calcolare i limiti significativi e gli eventuali asintoti di f.

3) Calcolare f', determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo o minimo relativi o assoluti.

4) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Esercizio 2 [8 punti]
a) Dato il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0, \tag{1}$$

calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2 + \log(n!) + \sin n\right) \left(\sinh\left(\frac{1}{n}\right) \log(n-1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \log(n+1)\right).$$

b) [FACOLTATIVO] Dimostrare (1).

Esercizio 3 [9 punti]
a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{3 - e^{\alpha x}}{e^{2x} + 3} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) Calcolarlo per $\alpha = 1$.

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^3 = -2(1 + \sqrt{3}i)\overline{z}$$

esprimendole prima in forma trigonometrica/esponenziale e poi in forma algebrica; disegnarle infine sul piano di Gauss.

Appello del 16.09.2013

TEMA 1

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = 2x - \sqrt{|x^2 - 4x + 3|},$$

(a) determinarne il segno ed eventuali asintoti;

(b) studiarne la derivabilità e calcolare f';

(c) determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;

(d) calcolare i limiti significativi di f';

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità.

Esercizio 2 [9 punti] Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right) - \frac{\alpha}{n}\right).$$

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x+3}} dx.$$

Esercizio 4 [5 punti] Rappresentare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della disequazione

$$\left| |z-1|^2 - \left| \frac{z-\overline{z}}{2} \right|^2 - 1 \right| \geq \mathrm{Im} z - 3$$

nel piano complesso.

TEMA 2

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = 2x - \sqrt{|x^2 - 5x + 6|},$$

(a) determinarne il segno ed eventuali asintoti;

(b) studiarne la derivabilità e calcolare f';

(c) determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;

(d) calcolare i limiti significativi di f';

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità.

Esercizio 2 [9 punti] Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(n \left(\cosh \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) - 1 \right) - \frac{\alpha}{n} \right).$$

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x-3}} \, dx.$$

Esercizio 4 [5 punti] Rappresentare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della disequazione

$$\left| |z-1|^2 - \left| \frac{z-\overline{z}}{2} \right|^2 - 1 \right| \leq \mathrm{Im} z + 4$$

nel piano complesso.

2 Svolgimento dei temi d'esame 2012 e 2013

2.1 2012, Area dell'Ingegneria dell'Informazione, Canali 1 e 4

Appello del 7.02.2012

NB: in fondo allo svolgimento del tema 2 si trovano alcuni brevi commenti agli errori più comuni trovati nella correzione.
I Temi 3 e 4 non sono svolti.
Commenti dopo la prima prova orale: è molto importante prepararsi all'orale scrivendo tutte le definizioni, gli enunciati e le principali dimostrazioni e controllando quello che si è scritto. Non è assolutamente sufficiente "avere un'idea" delle cose: queste vanno scritte in modo corretto e comprensibile.

TEMA 1

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) = \int_{-1}^{x} \frac{\arctan 3t}{t} dt,$$

(a) dimostrare che il dominio è $\mathbb{R}$, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) studiarne concavità e convessità della funzione;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Svolgimento. (a) Poniamo $g(t) = \arctan 3t/t$. Questa funzione è estendibile con continuità a $t = 0$ ponendo $g(0) = 3$, per cui g è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$; in particolare, è integrabile in $[-1, x]$ per ogni $x \geq 1$ e in $[x, -1]$ per ogni $x < -1$. Siccome g è sempre positiva, $f(x) > 0$ per ogni $x > -1$ e $f(x) < 0$ per ogni $x < -1$. Siccome $g(t) \sim \frac{\pi}{2t}$ per $t \to +\infty$ e per $t \to -\infty$, g non è integrabile in senso generalizzato né in $[-1, +\infty[$ né in $] - \infty, -1]$, cioè si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

L'esistenza di asintoti obliqui è dunque da studiare. Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{(\mathrm{H})}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan 3x}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x},$$

per cui non ci sono asintoti obliqui.
(b) Dal teorema fondamentale del calcolo e dal fatto che g è estendibile con continuità a 0 si ottiene

$$f'(x) = \frac{\arctan 3x}{x}, x \neq 0, \qquad f'(0) = 3.$$

Il segno di f' è sempre positivo, per cui f è strettamente crescente.
(c)

$$f''(x) = \frac{3x - (1 + 9x^2) \arctan 3x}{x^2(1 + 9x^2)}.$$

Per studiarne il segno, occorre considerare la funzione $h(x) = 3x - (1 + 9x^2) \arctan 3x$. Si ha che $h(0) = 0$ e $h'(x) = -18x \arctan 3x$, che è < 0 per ogni x. Di conseguenza, $h(x) > 0$ per ogni $x < 0$ e $h(x) < 0$ per ogni $x > 0$, cioè f è convessa in $] - \infty, 0]$ e concava in $[0, +\infty[$, per cui 0 è un punto di flesso. Il grafico è pertanto come in Figura 1.

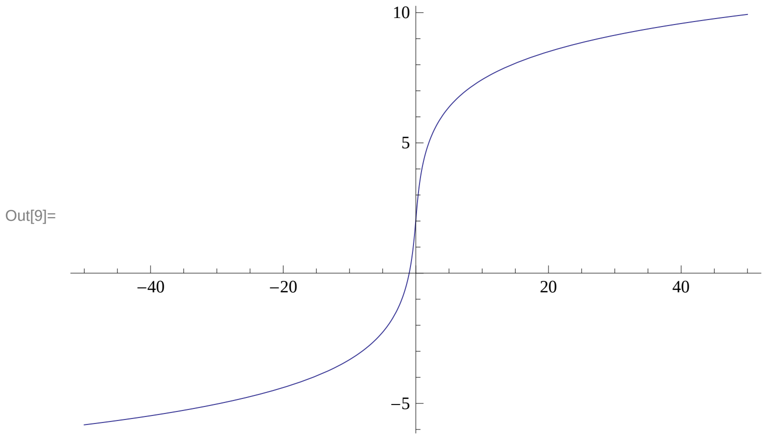


Figura 1: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\cos\ln x + \cos\arctan x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\ln(1+x^2) - \sin x^2}$$

Svolgimento. Si ha:

$$\begin{aligned}
\cos\arctan x &= 1 - \frac{(\arctan x)^2}{2} + \frac{(\arctan x)^4}{24} + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0 \\
&= 1 - \frac{1}{2}\Big(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big)^2 + \frac{x^4}{24} \qquad \text{per } x \to 0 \\
&= 1 - \frac{1}{2}\Big(x^2 - \frac{2}{3}x^4\Big) + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0 \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0
\end{aligned}$$

e

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned}
\ln(1+x^2) - \sin x^2 &= x^2 - \frac{x^4}{2} - x^2 + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0 \\
&= -\frac{x^4}{2} + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0.
\end{aligned}$$

Tenendo conto del fatto che $e^{-\frac{1}{x^2}}\cos\ln x = o(x^n)$ per $x \to 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, il limite diventa perciò

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{4} + o(x^4)}{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 3. Calcolare l'integrale
$$\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}}\,dx.$$
Svolgimento. Con la sostituzione $x = t^3$ si ha
$$\begin{aligned}\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}}\,dx = 3\int_0^2 t^2e^t\,dt &= 3\left[t^2e^t\Big|_0^2 - 2\int_0^2 te^t\,dt\right]\\ &= 3\left[4e^2 - 2\Big(te^t\Big|_0^2 - \int_0^2 e^t\,dt\Big)\right]\\ &= 12e^2 - 12e^2 + 6\big(e^2-1\big) = 6\big(e^2-1\big).\end{aligned}$$

Esercizio 4. Risolvere l'equazione
$$i\,\mathrm{Re}z + z^2 = |z|^2 - 1$$
e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Svolgimento. Poniamo $z = x + iy$. L'equazione diventa
$$ix + x^2 - y^2 + 2ixy = x^2 + y^2 - 1,$$
cioè
$$ix(1+2y) = 2y^2 - 1.$$
Siccome il primo membro è puramente immaginario ed il secondo membro è reale, l'unica possibilità è che siano entrambi nulli, cioè
$$\begin{aligned}x(1+2y) &= 0\\ 2y^2 - 1 &= 0,\end{aligned}$$
che dà
$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = 0.$$
Le due soluzioni si trovano entrambe sull'asse immaginario.

Esercizio 5 [facoltativo]. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile tre volte e sia $x_0\in\mathbb{R}$ tale che $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$. Si dimostri che x_0 è un punto di flesso per f.

Svolgimento. Per definizione di derivata (terza) si ha
$$f''(x) = f''(x_0) + f'''(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \qquad \text{per } x\to x_0$$
(ricordando che $f''(x_0) = 0$ per ipotesi)
$$\begin{aligned}&= f'''(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \qquad \text{per } x\to x_0\\ &= (x-x_0)\big(f'''(x_0) + o(1)\big) \qquad \text{per } x\to x_0.\end{aligned}$$
Siccome $f'''(x_0)\neq 0$ per ipotesi, esiste $\delta > 0$ tale che se $|x-x_0| < \delta$ allora $f'''(x_0) + o(1)$ ha lo stesso segno di $f'''(x_0)$, cioè se $|x-x_0|<\delta$ allora il segno di $f''(x)$ è uguale al segno di $(x-x_0)f'''(x_0)$. Questo segno è costante per $x < x_0$, $|x-x_0| < \delta$ e per $x > x_0$, $|x-x_0|<\delta$, ma cambia esattamente in x_0, che quindi è un punto di flesso.

TEMA 2

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) = \int_2^x \frac{\arctan 2t}{t} dt,$$

(a) dimostrare che il dominio è $\mathbb{R}$, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) studiarne concavità e convessità della funzione;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Svolgimento. (a) Poniamo $g(t) = \arctan 2t/t$. Questa funzione è estendibile con continuità a $t = 0$ ponendo $g(0) = 2$, per cui g è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$; in particolare, è integrabile in $[2, x]$ per ogni $x \geq 2$ e in $[x, 2]$ per ogni $x < 2$. Siccome g è sempre positiva, $f(x) > 0$ per ogni $x > 2$ e $f(x) < 0$ per ogni $x < 2$. Siccome $g(t) \sim \frac{\pi}{2t}$ per $t \to +\infty$ e per $t \to -\infty$, g non è integrabile in senso generalizzato né in $[2, +\infty[$ né in $]-\infty, 2]$, cioè si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

L'esistenza di asintoti obliqui è dunque da studiare. Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan 2x}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x},$$

per cui non ci sono asintoti obliqui.
(b) Dal teorema fondamentale del calcolo e dal fatto che g è estendibile con continuità a 0 si ottiene

$$f'(x) = \frac{\arctan 2x}{x}, x \neq 0, \qquad f'(0) = 2.$$

Il segno di f' è sempre positivo, per cui f è strettamente crescente.
(c)

$$f''(x) = \frac{2x - (1 + 4x^2)\arctan 2x}{x^2(1 + 4x^2)}.$$

Per studiarne il segno, occorre considerare la funzione $h(x) = 2x - (1 + 4x^2)\arctan 2x$. Si ha che $h(0) = 0$ e $h'(x) = -8x \arctan 2x$, che è < 0 per ogni x. Di conseguenza, $h(x) > 0$ per ogni $x < 0$ e $h(x) < 0$ per ogni $x > 0$, cioè f è convessa in $]-\infty, 0]$ e concava in $[0, +\infty[$, per cui 0 è un punto di flesso. Il grafico è pertanto come in figura 2.

Esercizio 2. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to0+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \ln x + \cos \sin 2x - e^{-2x^2}}{\ln(1 - x^2) + \arctan x^2}$$

Out[18]=

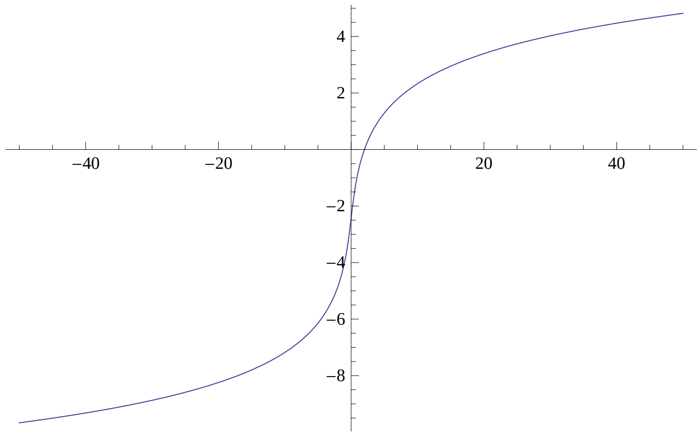


Figura 2: Il grafico di f (Tema 2).

Svolgimento. Si ha:

$$\begin{aligned}
\cos\sin 2x &= 1 - \frac{(\sin 2x)^2}{2} + \frac{(\sin 2x)^4}{24} + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0\\
&= 1 - \frac{1}{2}\Big(2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3)\Big)^2 + \frac{2x^4}{3} \qquad \text{per } x \to 0\\
&= 1 - \frac{1}{2}\Big(4x^2 - \frac{16}{3}x^4\Big) + \frac{2x^4}{3} + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0\\
&= 1 - 2x^2 + \frac{10}{3}x^4 + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0
\end{aligned}$$

e

$$e^{-2x^2} = 1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned}
\ln(1 - x^2) + \arctan x^2 &= -x^2 - \frac{x^4}{2} + x^2 + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0\\
&= -\frac{x^4}{2} + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0.
\end{aligned}$$

Tenendo conto del fatto che $e^{-\frac{1}{x^2}} \sin\ln x = o(x^n)$ per $x \to 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, il limite diventa perciò

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = -\frac{8}{3}.$$

Esercizio 3. Calcolare l'integrale

$$\int_0^9 \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}\, dx.$$

Svolgimento. Con la sostituzione $x = t^2$ si ha

$$\int_0^9 \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}\, dx = 2\int_0^3 t^2 e^t\, dt = 3\left[t^2 e^t\Big|_0^3 - 2\int_0^3 te^t\, dt\right]$$
$$= 2\left[9e^3 - 2\Big(te^t\Big|_0^3 - \int_0^3 e^t\, dt\Big)\right]$$
$$= 18e^3 - 12e^3 + 4\big(e^3 - 1\big) = 10e^3 - 4.$$

Esercizio 4. Risolvere l'equazione

$$i\,\mathrm{Im}z + z^2 = |z|^2 - 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Svolgimento. Poniamo $z = x + iy$. L'equazione diventa

$$iy + x^2 - y^2 + 2ixy = x^2 + y^2 - 1,$$

cioè

$$iy(1 + 2x) = 2y^2 - 1.$$

Siccome il primo membro è puramente immaginario ed il secondo membro è reale, l'unica possibilità è che siano entrambi nulli, cioè

$$\begin{aligned} y(1 + 2x) &= 0 \\ 2y^2 - 1 &= 0, \end{aligned}$$

che dà

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Le due soluzioni si trovano entrambe su una retta parallela all'asse immaginario.

Commenti agli errori più comuni.

Esercizio 1) Molti studenti hanno parzialmente confuso l'integranda con l'integrale: di fatto hanno studiato l'integranda, in particolare per quanto riguarda gli asintoti, mentre per quanto riguarda la derivata hanno ragionato correttamente (per il calcolo). Non mi aspettavo questo tipo di errore. Moltissimi studenti hanno sbagliato il segno della derivata prima, che era sostanzialmente il segno di $\arctan x/x$: questo era un errore assolutamente evitabile.

Esercizio 2) Pochissimi studenti hanno calcolato correttamente il limite. La maggior parte ha tralasciato almeno un termine di ordine 4 al numeratore e non ha giustificato correttamente il fatto che si poteva trascurare $e^{-1/x^2}\ln\sin x$. In particolare, molti hanno erroneamente scritto che si poteva trascurare perché infinitesimo; altri hanno scritto che si poteva trascurare perché, ad esempio, $o(\cos\arctan x)$ per $x \to 0$. Ma questo è ovvio, perché $\cos\arctan x$ non è nemmeno infinitesimo per $x \to 0$. Si doveva invece dire che è $o(x^4)$ per $x \to 0$ (anzi $o(x^n)$ per ogni n). Altri hanno commesso il grossolano errore di sviluppare e^{-1/x^2} intorno a $x = 0$ come $1 - 1/x^2 \ldots$ A lezione si era cercato di mettere in guardia da questo tipo di errori.

Esercizio 4) Ricordo che la parte immaginaria del numero complesso $x + iy$ è y e non iy.

Appello del 23.02.2012

TEMA 1

COMMENTI.
1) *È MOLTO IMPORTANTE CHE CHI NON HA SUPERATO LO SCRITTO SI METTA A STUDIARE TUTTO DA CAPO E NON COMMETTA L'ERRORE DI SVOLGERE SOLO TEMI D'ESAME.*
2) COLPISCE IL NUMERO DI STUDENTI CHE NON È STATO IN GRADO DI RISOLVERE DISEQUAZIONI CON LA RADICE: QUASI NESSUNO HA STUDIATO CORRETTAMENTE IL SEGNO DI f.
3) SI RICORDA CHE IL CRITERIO ASINTOTICO DELLA RADICE E DEL RAPPORTO DANNO INFORMAZIONI ANCHE SULLA CONVERGENZA SEMPLICE: SE IL LIMITE È > 1, ALLORA LA SERIE NON CONVERGE NEANCHE SEMPLICEMENTE PERCHÉ IL TERMINE GENERALE NON È INFINITESIMO. SE CI SI LIMITA A DIRE CHE LA SERIE DIVERGE ASSOLUTAMENTE, NON SI RISPONDE ALLA DOMANDA SULLA CONVERGENZA SEMPLICE.

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x) = 2\sqrt{|x^2-4|} - |x| + 1$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e studiarne la convessità e la concavità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Svolgimento. (a) La funzione è visibilmente definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è pari, per cui la studiamo per $x \geq 0$. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x^2-4} - x + 1 & \text{per } x \geq 2, \\ 2\sqrt{4-x^2} - x + 1 & \text{per } 0 < x < 2. \end{cases}$$

$f(x) \geq 0$, per $x \geq 2$, se e solo se $2\sqrt{x^2-4} \geq x-1$. Siccome $x-1 \geq 0$ se $x \geq 2$, si possono elevare al quadrato entrambi i membri, ottenendo la disequazione equivalente $3x^2+2x-17 \geq 0$, che per $x \geq 2$ è soddisfatta dagli $x \geq \frac{-1+2\sqrt{13}}{3}$. Per $0 \leq x < 2$, $f(x) \geq 0$ se e solo se $2\sqrt{4-x^2} \geq x-1$, che è certamente soddisfatta se $x \leq 1$, mentre per $x > 1$ è equivalente alla disequazione $5x^2-2x-15 \leq 0$, soddisfatta per $1 < x \leq \frac{1+2\sqrt{19}}{5} (< 2)$. In sintesi, $f(x) < 0$ se e solo se $\frac{1+2\sqrt{19}}{5} < x < \frac{-1+2\sqrt{13}}{3}$.
Siccome, per $x > 2$, $f(x) = x\big(2\sqrt{1-4/x^2}-1\big)+1$, visibilmente $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Inoltre si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Per trovare l'eventuale asintoto obliquo dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to+\infty} \Big(2\sqrt{x^2-4} - 2x + 1\Big) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{4(x^2-4)-(2x-1)^2}{2\sqrt{x^2-4}+2x-1} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x-17}{2x\Big(\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+1-\frac{1}{2x}\Big)} = 1. \end{aligned}$$

Dunque la retta $y = x+1$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$, e quindi $y = -x+1$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

(b) Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}} - 1 & \text{per } x > 2, \\ -\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} - 1 & \text{per } 0 < x < 2. \end{cases}$$

Per $0 < x < 2$ visibilmente $f'(x) < 0$, mentre, per $x > 2$, $f(x) \geq 0$ se e solo se $2x \geq \sqrt{x^2-4}$, cioè sempre. Il minimo assoluto si trova in 2 (e quindi anche in -2), mentre 0 è un punto di massimo relativo. Si ha

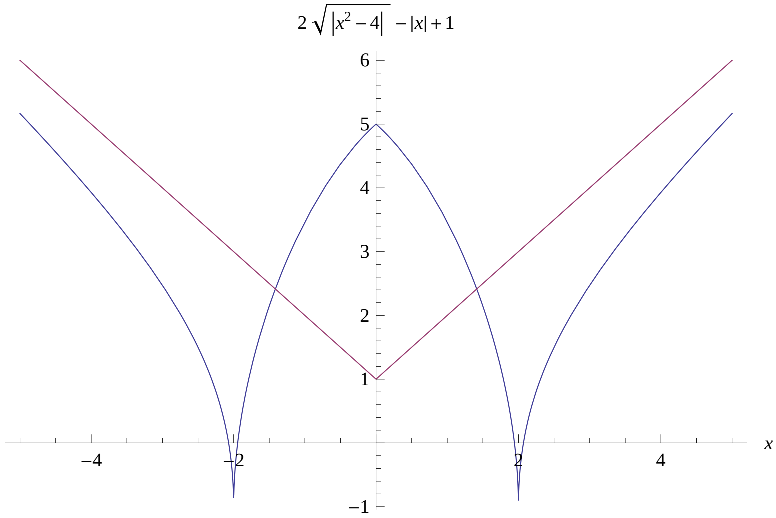


Figura 3: Il grafico di f (Tema 1).

$\lim_{x\to 0+} f'(x) = -1$, per cui 0 è un punto angoloso. Inoltre $\lim_{x\to 2-} f'(x) = -\infty$, mentre $\lim_{x\to 2+} f'(x) = +\infty$, per cui 2 è un punto di cuspide.

(c) Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x^2-4}-\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{-8}{(x^2-4)^{3/2}} & \text{per } \ x > 2 \\ \frac{-2\sqrt{4-x^2}-\frac{2x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} = \frac{-8}{(4-x^2)^{3/2}} & \text{per } \ 0 < x < 2, \end{cases}$$

e quindi f è concava nei due intervalli $0 < x < 2$ e $x > 2$. Il grafico di f è perciò come in Figura 1.

Esercizio 2 Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \big|\alpha - 1\big|^n \frac{n!}{(n+1)! - n! + 1}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Per la convergenza assoluta usiamo il criterio del rapporto. Si ha (per $\alpha \neq 1$, caso banale in cui la serie ha il termine generale identicamente nullo):

$$\begin{aligned} \frac{|\alpha-1|^{n+1}(n+1)!}{(n+2)! - (n+1)! + 1} \frac{(n+1)! - n! + 1}{|\alpha - 1|^n n!} &= |\alpha - 1| \frac{(n+1)(1+o(1))}{(n+2)(1+o(1))} \\ &\to |\alpha - 1| \qquad \text{per } \ n \to \infty. \end{aligned}$$

Dunque la serie converge assolutamente per $|\alpha - 1| < 1$, cioè per $0 < \alpha < 2$, mentre non converge perché il termine generale non è infinitesimo per $|\alpha - 1| > 1$, cioè per $\alpha < 0$ o per $\alpha > 2$. Restano quindi da studiare i due casi $\alpha = 0$ e $\alpha = 2$, cioè la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(n+1)! - n! + 1}.$$

Siccome $\frac{n!}{(n+1)!-n!+1} \sim \frac{1}{n+1}$ per $n \to \infty$, la serie non converge assolutamente. Siccome inoltre una verifica immediata dà

$$\frac{(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!+1} \leq \frac{n!}{(n+1)!-n!+1} \quad \text{per ogni } n \text{ sufficientemente grande,}$$

la serie converge per il criterio di Leibniz.

Esercizio 3 Data la funzione

$$f(x) = \frac{2e^x+1}{e^{2x}+2e^x+2},$$

(a) se ne calcoli una primitiva;
(b) si provi che l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente e lo si calcoli.

Svolgimento. Il denominatore non ha zeri reali, per cui l'integranda è una funzione continua in tutto $\mathbb{R}$. Per verificare l'integrabilità in senso generalizzato basta osservare che

$$\frac{2e^x+1}{e^{2x}+2e^x+2} \sim \frac{2}{e^x} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

Siccome l'integranda ha segno definitivamente costante per $x \to +\infty$, risulta integrabile per confronto con $1/e^x$, che è integrabile in senso generalizzato in $[0, +\infty[$.
La sostituzione $e^x = t$ dà

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{2e^x+1}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx &= \int_1^{+\infty} \frac{2t+1}{t\big(t^2+2t+2\big)}\,dt \\
&= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2t} + \frac{-t+2}{2(t^2+2t+2)}\right) dt \\
&= \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \left(\frac{1}{2t} - \frac{1}{4}\frac{2t+2}{t^2+2t+2} + \frac{3}{2}\frac{1}{t^2+2t+2}\right) dt \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{\ln b}{2} - \frac{\ln\big(b^2+2b+2\big) - \ln 5}{4} + \frac{3}{2}\int_1^b \frac{1}{(t+1)^2+1}\,dt\right) \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{\ln b}{2} - \frac{\ln\big(b^2+2b+2\big) - \ln 5}{4} + \frac{3}{2}\big(\arctan(b+1) - \arctan 2\big)\right) \\
&= \lim_{b\to+\infty} \ln \frac{\sqrt[4]{5}\sqrt{b}}{\sqrt[4]{b^2+2b+2}} + \frac{3}{2}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan 2\Big) \\
&= \frac{\ln 5}{4} + \frac{3}{2}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan 2\Big).
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Si esprimano in forma algebrica gli zeri del polinomio

$$\big(z^2+iz+2\big)\big(z^3-8i\big).$$

Svolgimento. Gli zeri di z^2+iz+2 sono $z = \frac{-i+\sqrt{-9}}{2}$, cioè $i, -2i$. Gli zeri di z^3-8i sono le radici cubiche di $8i$, cioè $z = 2e^{i\pi/6}, 2e^{i5\pi/6}, 2e^{i2\pi/3} = \sqrt{3}+i, -\sqrt{3}+i, -2i$.

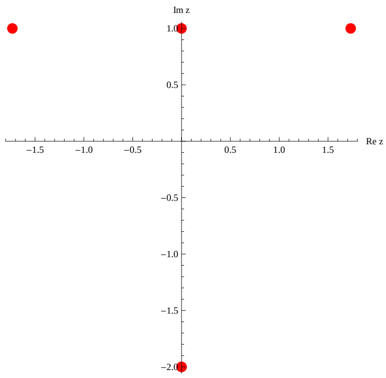


Figura 4: Soluzione dell'esercizio 4 (Tema 1).

Esercizio 5 [facoltativo] Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{n^2}}{(n!)^{\alpha n}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{N}$.

Svolgimento. Usiamo il criterio della radice. Si tratta perciò di calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^\alpha}.$$

Per $\alpha = 1$ è ben noto che tale limite è $+\infty$. Per $\alpha = 2$, osserviamo che si ha

$$\frac{n^n}{n!\,n!} \le \left(\frac{n}{n-\left[\frac{n}{2}\right]}\right)^n \frac{1}{3^{n-2}}\frac{1}{4} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \to 0,$$

dove $[\frac{n}{2}]$ indica la parte intera di $\frac{n}{2}$, e quindi la serie converge. Per $\alpha > 2$ la serie converge per confronto con il caso $\alpha = 2$.

TEMA 2

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x) = 2\sqrt{|x^2-9|} - |x| + 2$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e studiarne la convessità e la concavità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Svolgimento. (a) La funzione è visibilmente definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è pari, per cui la studiamo per $x \ge 0$. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x^2-9} - x + 2 & \text{per } \ x \ge 3, \\ 2\sqrt{9-x^2} - x + 2 & \text{per } \ 0 < x < 3. \end{cases}$$

$f(x) \geq 0$, per $x \geq 3$, se e solo se $2\sqrt{x^2-9} \geq x-2$. Siccome $x-2 \geq 0$ se $x \geq 3$, si possono elevare al quadrato entrambi i membri, ottenendo la disequazione equivalente $3x^2+4x-40 \geq 0$, che per $x \geq 3$ è soddisfatta dagli $x \geq \frac{-2+2\sqrt{31}}{3}$. Per $0 \leq x < 3$, $f(x) \geq 0$ se e solo se $2\sqrt{9-x^2} \geq x-2$, che è certamente soddisfatta se $x \leq 2$, mentre per $x > 2$ è equivalente alla disequazione $5x^2-4x-32 \leq 0$, soddisfatta per $1 < x \leq \frac{2+2\sqrt{41}}{5} (< 3)$. In sintesi, $f(x) < 0$ se e solo se $\frac{2+2\sqrt{41}}{5} < x < \frac{-2+2\sqrt{31}}{3}$.
Siccome, per $x > 3$, $f(x) = x\big(2\sqrt{1-9/x^2}-1\big)+2$, visibilmente $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Inoltre si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Per trovare l'eventuale asintoto obliquo dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x)-x &= \lim_{x\to+\infty}\Big(2\sqrt{x^2-9}-2x+2\Big)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{4(x^2-9)-(2x-2)^2}{2\sqrt{x^2-9}+2x-2}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{8x-40}{2x\Big(\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}+1-\frac{1}{x}\Big)} = 2.\end{aligned}$$

Dunque la retta $y = x+2$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$, e quindi $y = -x+2$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

(b) Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{x^2-9}} - 1 & \text{per } \ x > 3,\\ -\frac{2x}{\sqrt{9-x^2}} - 1 & \text{per } \ 0 < x < 3.\end{cases}$$

Per $0 < x < 3$ visibilmente $f'(x) < 0$, mentre, per $x > 3$, $f(x) \geq 0$ se e solo se $2x \geq \sqrt{x^2-9}$, cioè sempre. Il minimo assoluto si trova in 3 (e quindi anche in -3), mentre 0 è un punto di massimo relativo. Si ha $\lim_{x\to0+} f'(x) = -1$, per cui 0 è un punto angoloso. Inoltre $\lim_{x\to3-} f'(x) = -\infty$, mentre $\lim_{x\to3+} f'(x) = +\infty$, per cui 3 è un punto di cuspide.

(c) Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x^2-9}-\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-9}}}{x^2-9} = \frac{-18}{(x^2-9)^{3/2}} & \text{per } \ x > 3\\ \frac{-2\sqrt{9-x^2}-\frac{2x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \frac{-18}{(9-x^2)^{3/2}} & \text{per } \ 0 < x < 3,\end{cases}$$

e quindi f è concava nei due intervalli $0 < x < 3$ e $x > 3$. Il grafico di f è perciò come in Figura 2.

Esercizio 2 Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\big|\alpha+1\big|^n\frac{(n-1)!}{n!-(n-1)!+2}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Per la convergenza assoluta usiamo il criterio del rapporto. Si ha (per $\alpha \neq -1$, caso banale in cui la serie ha il termine generale identicamente nullo):

$$\begin{aligned}\frac{|\alpha+1|^{n+1}n!}{(n+1)!-n!+2}\,\frac{n!-(n-1)!+2}{|\alpha+1|^n(n-1)!} &= |\alpha+1|\frac{n(1+o(1))}{(n+1)(1+o(1))}\\ &\to |\alpha+1| \qquad \text{per } \ n\to\infty.\end{aligned}$$

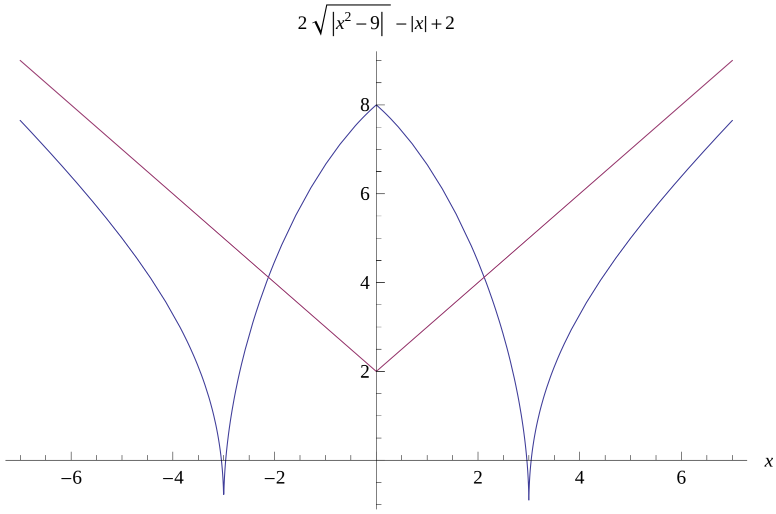


Figura 5: Il grafico di f (Tema 2).

Dunque la serie converge assolutamente per $|\alpha+1|<1$, cioè per $-2<\alpha<0$, mentre non converge perché il termine generale non è infinitesimo per $|\alpha+1|>1$, cioè per $\alpha<-2$ o per $\alpha>0$. Restano quindi da studiare i due casi $\alpha=0$ e $\alpha=-2$, cioè la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n-1)!}{n!-(n-1)!+1}.$$

Siccome $\frac{(n-1)!}{n!-(n-1)!+1}\sim\frac{1}{n}$ per $n\to\infty$, la serie non converge assolutamente. Siccome inoltre una verifica immediata dà

$$\frac{n!}{(n+1)!-n!+2}\le\frac{(n-1)!}{n!-(n-1)!+2}\qquad\text{per ogni } n \text{ sufficientemente grande,}$$

la serie converge per il criterio di Leibniz.

Esercizio 3 Data la funzione

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^{2x}-2e^x+2},$$

(a) se ne calcoli una primitiva;
(b) si provi che l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ è convergente e lo si calcoli.

Svolgimento. Il denominatore non ha zeri reali, per cui l'integranda è una funzione continua in tutto $\mathbb{R}$. Per verificare l'integrabilità in senso generalizzato basta osservare che

$$\frac{e^x-1}{e^{2x}-2e^x+2}\sim\frac{1}{e^x}\qquad\text{per } x\to+\infty$$

Siccome l'integranda ha segno definitivamente costante per $x\to+\infty$, risulta integrabile per confronto con $1/e^x$, che è integrabile in senso generalizzato in $[0,+\infty[$.

La sostituzione $e^x = t$ dà

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 2e^x + 2}\, dx &= \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t\big(t^2 - 2t + 2\big)}\, dt \\
&= \int_1^{+\infty} \left(-\frac{1}{2t} + \frac{t}{2(t^2 - 2t + 2)} \right) dt \\
&= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \left(-\frac{1}{2t} + \frac{2t-2}{4(t^2 - 2t + 2)} + \frac{1}{2(t^2 - 2t + 2)} \right) dt \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{\ln b}{2} + \frac{\ln\big(b^2 - 2b + 2\big)}{4} + \frac{1}{2} \int_1^b \frac{1}{(t-1)^2 + 1}\, dt \right) \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{\ln b}{2} + \frac{\ln\big(b^2 - 2b + 2\big)}{4} + \frac{1}{2} \arctan(b-1) \right) \\
&= \lim_{b \to +\infty} \ln \frac{\sqrt[4]{b^2 - 2b + 2}}{\sqrt{b}} + \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Si esprimano in forma algebrica gli zeri del polinomio

$$\big(z^2 - 3iz - 2\big)\big(z^3 + 8i\big).$$

Svolgimento. Gli zeri di $z^2 - 3iz - 2$ sono $z = \frac{3i + \sqrt{-1}}{2}$, cioè $i, 2i$. Gli zeri di $z^3 + 8i$ sono le radici cubiche di $-8i$, cioè $z = 2e^{i\pi/2}, 2e^{i7\pi/6}, 2e^{11\pi/6} = 2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$.

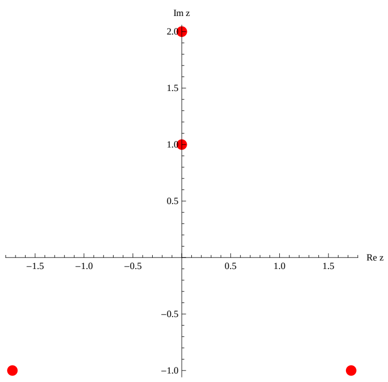


Figura 6: Soluzione dell'esercizio 4 (Tema 2).

Per il facoltativo si veda il Tema 1.

Appello del 17.07.2012

TEMA 1

Esercizio 1 Data la funzione
$$f(x) = \left|\frac{x-2}{x+3}\right| \mathrm{e}^{|x-2|}$$
(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, calcolarne i limiti agli estremi del dominio e determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e dimostrare che esiste $M > 0$ tale che $f''(x) > 0$ se $|x| > M$;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.
Svolgimento. (a) Il dominio è $\{x \in \mathbb{R} : x \neq -3\}$. Non ci sono simmetrie evidenti. La funzione è sempre ≥ 0 e si annulla solo per $x = 2$ (che pertanto è il punto di minimo assoluto). Si ha visibilmente $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-3} f(x) = +\infty$. Siccome
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{|x-2|}}{x} = \pm\infty,$$
non ci sono asintoti obliqui.
(b) Si può riscrivere
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x+3}e^{2-x} & \text{per } x < -3 \\ \frac{2-x}{x+3}e^{2-x} & \text{per } -3 < x \leq 2 \\ \frac{x-2}{x+3}e^{x-2} & \text{per } 2 < x, \end{cases}$$
per cui risulta
$$f'(x) = \begin{cases} \left(\frac{x+3-(x-2)}{(x+3)^2} - \frac{x-2}{x+3}\right)e^{2-x} = \frac{-x^2-x+11}{(x+3)^2}e^{2-x} & \text{per } x < -3 \\ \left(\frac{-x-3-(2-x)}{(x+3)^2} - \frac{2-x}{x+3}\right)e^{2-x} = \frac{x^2+x-11}{(x+3)^2}e^{2-x} & \text{per } -3 < x < 2 \\ \left(\frac{x+3-(x-2)}{(x+3)^2} + \frac{x-2}{x+3}\right)e^{x-2} = \frac{x^2+x+1}{(x+3)^2}e^{x-2} & \text{per } 2 < x. \end{cases}$$
Il polinomio $x^2 + x - 11$ si annulla in $\frac{-1-\sqrt{45}}{2} < -3 < 2 < \frac{-1+\sqrt{45}}{2}$, per cui solo il primo zero è da considerarsi. Il polinomio $x^2 + x + 1$ si annulla in $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ ed entrambi i valori sono < 2. La funzione è pertanto decrescente per $x < \frac{-1-\sqrt{45}}{2}$, ha un punto di minimo relativo in $\frac{-1-\sqrt{45}}{2}$ ed è crescente per $\frac{-1-\sqrt{45}}{2} < x < -3$. È inoltre decrescente per $-3 < x < 2$, mentre è crescente per $x > 2$. Il punto $x = 2$ è un punto angoloso, perché $\lim_{x\to2^-} f'(x) = -\frac{1}{5} \neq \lim_{x\to2^+} f'(x) = \frac{1}{5}$.
(c) Si ha
$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-58-13x+4x^2+x^3}{(x+3)^3}e^{2-x} & \text{per } x < -3 \\ -\frac{-58-13x+4x^2+x^3}{(x+3)^3}e^{2-x} & \text{per } -3 < x < 2 \\ \frac{2+7x+4x^2+x^3}{(x+3)^3}e^{x-2} & \text{per } 2 < x. \end{cases}$$
Siccome si ha evidentemente $\lim_{x\to\pm\infty} f''(x) = +\infty$, per definizione di limite esiste $M > 0$ tale che $f''(x) > 0$ se $|x| > M$.
Il grafico risulta essere

Esercizio 2 Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) - \sin\frac{1}{2x^2} - e^{-x}}{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \arctan\frac{1}{x^2}}.$$

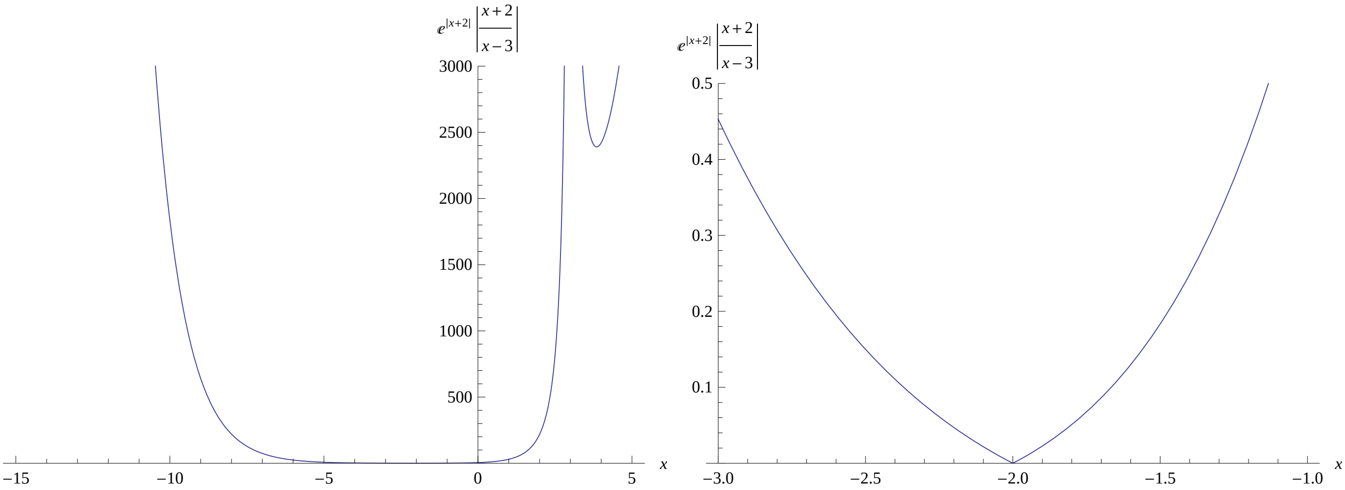


Figura 7: Il grafico di $f(x) = \left|\frac{x-2}{x+3}\right| \mathrm{e}^{|x-2|}$ (Tema 1); la figura sulla destra è un ingrandimento intorno al punto angoloso.

Svolgimento. Dati gli sviluppi

$$\arctan y = y + o(y^2) \text{ per } y \to 0, \cos\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{24x^4} + o(\frac{1}{x^5}), \sin\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^5}) \text{ per } x \to +\infty$$

e tenuto conto del fatto ben noto che $e^{-x} = \frac{1}{x^\alpha}$ per $x \to +\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, il numeratore risulta:

$$\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{24x^4} - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^4}) = -\frac{1}{24x^4} + o(\frac{1}{x^4}) \text{ per } x \to +\infty.$$

Il denominatore risulta

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} - \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^4}) = -\frac{1}{2x^4} + o(\frac{1}{x^4}) \text{ per } x \to +\infty.$$

Il limite pertanto risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{24x^4} + o(\frac{1}{x^4})}{-\frac{1}{2x^4} + o(\frac{1}{x^4})} = \frac{1}{12}.$$

Esercizio 3 (a) Calcolare l'ordine di infinito per $x \to 3$ della funzione

$$g(x) = \frac{x}{9 - x^2};$$

b) dire per quali $\alpha \geq 0$ converge l'integrale

$$I = \int_0^3 \frac{x}{\left(9 - x^2\right)^\alpha} dx;$$

c) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.
Svolgimento. (a) $g(x) = \frac{x}{(3+x)(3-x)}$, perciò è infinita di ordine 1 per $x \to 3$.
(b) Siccome l'integranda è infinita di ordine α (se $\alpha > 0$) per $x \to 3^-$, l'integrale risulta convergente se e

solo se $\alpha < 1$. (c) Si ha

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx = (x=3t) \quad 3\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$
$$= -3(1-t^2)^{1/2}\Big|_{t=0}^{t=1} = 3.$$

Esercizio 4 Risolvere l'equazione

$$|z+2i| = \Big||z|-2\Big|$$

e disegnarne le soluzioni sul piano complesso.
Svolgimento. Posto $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, l'equazione diventa

$$|x+i(2+y)| = \left|\sqrt{x^2+y^2}-2\right|,$$

cioè

$$x^2+(2+y)^2 = x^2+y^2+4-4\sqrt{x^2+y^2}.$$

Semplificando, l'equazione diventa

$$\sqrt{x^2+y^2} = -y,$$

che ha per soluzioni $x = 0$ e $y \le 0$.

Seguono soluzioni nel piano di Gauss.

Out[20]=

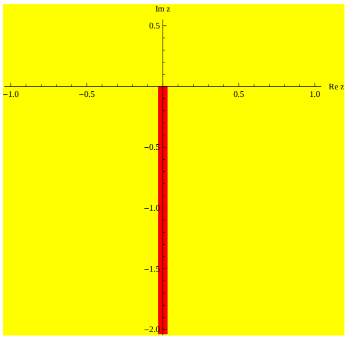


Figura 8: Soluzioni di $|z+2i| = \Big||z|-2\Big|$ (Tema 1).

TEMA 2

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x) = \left|\frac{x+2}{x-3}\right| e^{|x+2|}$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, calcolarne i limiti agli estremi del dominio e determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e dimostrare che esiste $M > 0$ tale che $f''(x) > 0$ se $|x| > M$;

(d) disegnarne un grafico qualitativo.
Svolgimento. (a) Il dominio è $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 3\}$. Non ci sono simmetrie evidenti. La funzione è sempre ≥ 0 e si annulla solo per $x = -2$ (che pertanto è il punto di minimo assoluto). Si ha visibilmente $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$. Siccome

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{|x+2|}}{x} = \pm\infty,$$

non ci sono asintoti obliqui.
(b) Si può riscrivere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-3} e^{-x-2} & \text{per } x < -2 \\ \frac{x+2}{3-x} e^{x+2} & \text{per } -2 < x \leq 3 \\ \frac{x+2}{x-3} e^{x+2} & \text{per } 3 < x, \end{cases}$$

per cui risulta

$$f'(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-3-(x+2)}{(x-3)^2} - \frac{x+2}{x-3}\right) e^{-x-2} = \frac{-x^2+x+1}{(x-3)^2} e^{-x-2} & \text{per } x < -2 \\ \left(\frac{3-x+x+2}{(x-3)^2} + \frac{x+2}{3-x}\right) e^{x+2} = \frac{-x^2+x+11}{(x-3)^2} e^{x+2} & \text{per } -2 < x < 3 \\ \left(\frac{x-3-(x+2)}{(x-3)^2} + \frac{x+2}{x-3}\right) e^{x+2} = \frac{x^2-x-11}{(x-3)^2} e^{x+2} & \text{per } 3 < x. \end{cases}$$

Il polinomio x^2-x-11 si annulla in $-2 < \frac{1-\sqrt{45}}{2} < 3 < \frac{1+\sqrt{45}}{2}$, per cui solo il secondo zero è da considerarsi. Il polinomio $-x^2+x+1$ si annulla in $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ ed entrambi i valori sono > -2. La funzione è pertanto decrescente per $x < -2$, ha un punto di minimo relativo in $\frac{1-\sqrt{45}}{2}$ ed è crescente per $\frac{1-\sqrt{45}}{2} < x < 3$. È inoltre decrescente per $3 < x < \frac{1+\sqrt{45}}{2}$, mentre è crescente per $x > \frac{1+\sqrt{45}}{2}$. Il punto $x = -2$ è un punto angoloso, perché $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\frac{1}{5} \neq \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \frac{1}{5}$.
(c) Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-2+7x-4x^2+x^3}{(x-3)^3} e^{-x-2} & \text{per } x < -2 \\ -\frac{58-13x-4x^2+x^3}{(x-3)^3} e^{x+2} & \text{per } -2 < x < 3 \\ \frac{58-13x-4x^2+x^3}{(x-3)^3} e^{x+2} & \text{per } 3 < x. \end{cases}$$

Siccome si ha evidentemente $\lim_{x\to\pm\infty} f''(x) = +\infty$, per definizione di limite esiste $M > 0$ tale che $f''(x) > 0$ se $|x| > M$.
Il grafico risulta essere

Esercizio 2 Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x} + \sin\left(\cos\frac{1}{x} - 1\right) + \arctan\frac{1}{2x^2}}{\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \sin\frac{1}{x^2}}.$$

Svolgimento. Dati gli sviluppi

$$\sin y = y + o(y^2) \text{ per } y \to 0, \cos\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{24x^4} + o(\frac{1}{x^5}), \arctan\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^5}) \text{ per } x \to +\infty$$

e tenuto conto del fatto ben noto che $e^{-x} = \frac{1}{x^\alpha}$ per $x \to +\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, il numeratore risulta:

$$-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{24x^4} + \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^4}) = \frac{1}{24x^4} + o(\frac{1}{x^4}) \text{ per } x \to +\infty.$$

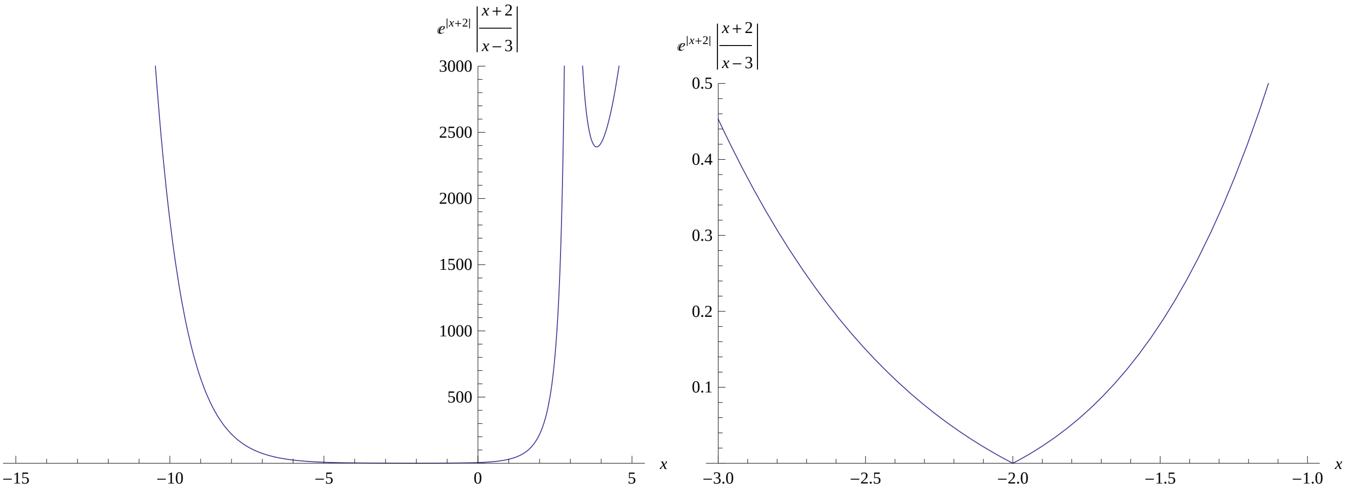


Figura 9: Il grafico di $f(x) = \left|\frac{x+2}{x-3}\right| e^{|x+2|}$ (Tema 2); la figura sulla destra è un ingrandimento intorno al punto angoloso.

Il denominatore risulta

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^4}) = -\frac{1}{2x^4} + o(\frac{1}{x^4}) \text{ per } x \to +\infty.$$

Il limite pertanto risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{24x^4} + o(\frac{1}{x^4})}{-\frac{1}{2x^4} + o(\frac{1}{x^4})} = -\frac{1}{12}.$$

Esercizio 3 (a) Calcolare l'ordine di infinito per $x \to 2$ della funzione

$$g(x) = \frac{x}{4 - x^2};$$

b) dire per quali $\alpha \geq 0$ converge l'integrale

$$I = \int_0^2 \frac{x}{\left(4 - x^2\right)^\alpha} dx;$$

c) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Svolgimento. (a) $g(x) = \frac{x}{(2+x)(2-x)}$, perciò è infinita di ordine 1 per $x \to 2$.

(b) Siccome l'integranda è infinita di ordine α (se $\alpha > 0$) per $x \to 2^-$, l'integrale risulta convergente se e solo se $\alpha < 1$. (c) Si ha

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} dx &= (x = 2t) \quad 2\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} dt \\ &= -2(1 - t^2)^{1/2}\Big|_{t=0}^{t=1} = 2.\end{aligned}$$

Esercizio 4 Risolvere l'equazione

$$|z - 3i| = \Big||z| - 3\Big|$$

e disegnarne le soluzioni sul piano complesso.
Svolgimento. Posto $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, l'equazione diventa

$$|x + i(-3 + y)| = \left|\sqrt{x^2 + y^2} - 3\right|,$$

cioè

$$x^2 + (-3 + y)^2 = x^2 + y^2 + 9 - 6\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Semplificando, l'equazione diventa

$$\sqrt{x^2 + y^2} = y,$$

che ha per soluzioni $x = 0$ e $y \geq 0$.
Seguono soluzioni nel piano di Gauss.

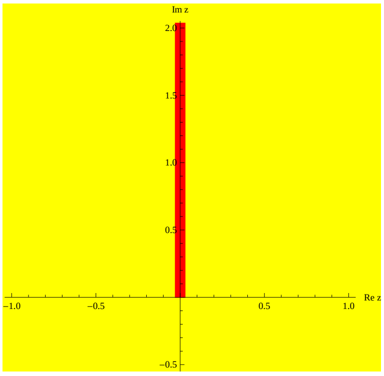


Figura 10: Soluzioni di $|z - 3i| = \Big||z| - 3\Big|$ (Tema 2).

Svolgimento dell'appello del 18.09.2012

TEMA 1

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) = \ln \cosh x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sinh x|$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, calcolarne i limiti agli estremi del dominio e determinarne gli eventuali asintoti; provare che $f(x) > 0$ se e solo se $x < \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{2}$;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(c) studiarne concavità e convessità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.
Svolgimento. (a) Il dominio è $x \neq 0$. La funzione non presenta simmetrie evidenti e può essere riscritta come

$$f(x) = \ln \frac{\cosh x}{\sqrt{e^x|\sinh x|}}.$$

Si ha immediatamente che $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \ln\frac{\cosh^2 x}{e^x \sinh x} = -\frac{1}{2}\ln 2.$$

Dunque la retta $y = -\frac{1}{2}\ln 2$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

perché $\lim_{x\to-\infty} e^x \sinh x = -1/2$.
Per la ricerca dell'asintoto obliquo per $x \to -\infty$ si devono calcolare il limite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln\frac{\cosh^2 x}{-e^x\sinh x}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{2(1-e^{2x})}}{2x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\frac{e^{-2x}(1+2e^{-2x}+e^{-4x})}{2(1-e^{2x})}}{2x} = -1\end{aligned}$$

e poi il limite

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} \ln\cosh x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sinh x| = -\frac{1}{2}\ln 2$$

(lo svolgimento di questo limite è nel Tema 2). Perciò $y = -x - \frac{1}{2}\ln 2$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.
Per lo studio del segno di f, osserviamo che $f(x) \geq 0$ se e solo se

$$\frac{\cosh x}{\sqrt{e^x|\sinh x|}} \geq 1,$$

cioè se e solo se

$$\cosh^2 x \geq e^x|\sinh x|. \tag{1}$$

Quest'ultima disequazione, per $x \geq 0$, è equivalente a

$$e^{4x} - 4e^{2x} - 1 \leq 0,$$

che ha per soluzioni $0 \leq x \leq \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{2}$. Per $x < 0$ la disequazione (1) è equivalente a

$$3e^{2x} + e^{-2x} \geq 0,$$

che è sempre vera.
(b) Siccome $\frac{d}{dx}\ln|\sinh x| = \cosh x/\sinh x$ per ogni $x \neq 0$, si ha, per ogni $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{2\sinh^2 x - \cosh^2 x - \sinh x\cosh x}{2\cosh x\sinh x} = \frac{e^{-2x}-3}{4\cosh x\sinh x}.$$

Si ha perciò che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $-\frac{\ln 3}{2} \leq x < 0$. Il punto $-\frac{\ln 3}{2}$ è perciò di minimo locale stretto.
(c) Si ha immediatamente

$$f''(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} - \frac{1}{2}\frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{3}{2\cosh^2 x\sinh^2 x} > 0.$$

La funzione è perciò convessa per $x < 0$ e per $x > 0$.
(d) Il grafico è in Figura 1.

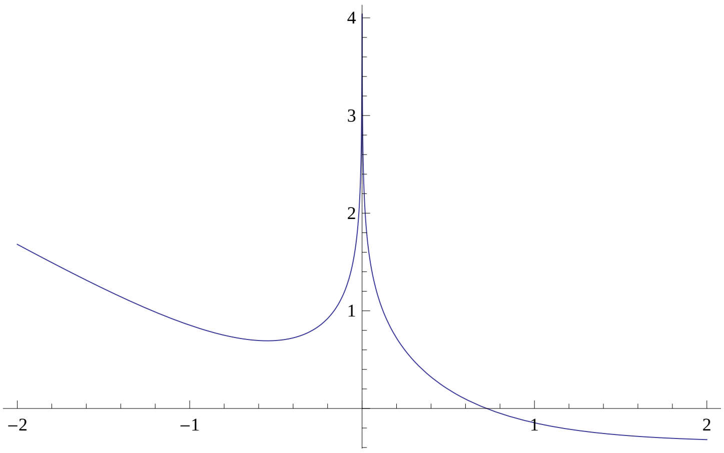


Figura 11: Il grafico di $f(x) = \ln\cosh x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sinh x|$ (Tema 1).

Esercizio 2. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left[e^{-n}\sin n + \cos\sin\frac{1}{n} - e^{\frac{-1}{2n^2}} + \frac{1}{12}\frac{1}{n^4}\right]^{\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Utilizzando gli sviluppi asintotici si ha, per $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned}\cos\sin\frac{1}{n} &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{n} + \frac{1}{4!}\sin^4\frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big) = 1 - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{3!n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)^2 + \frac{1}{4!}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\\ &= 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^4} + \frac{1}{4!}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{5}{24}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\end{aligned}$$

e

$$e^{\frac{-1}{2n^2}} = 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{8n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big).$$

Inoltre $|e^{-n}\sin n| \le e^{-n} = o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)$ per $n \to +\infty$. Di conseguenza si ha, per $n \to +\infty$,

$$e^{-n}\sin n + \cos\sin\frac{1}{n} - e^{\frac{-1}{2n^2}} + \frac{1}{12}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{6}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big).$$

Il termine generale della serie è perciò asintotico a

$$\frac{1}{6^\alpha}\frac{1}{n^{2+4\alpha}}.$$

La serie perciò converge se e solo se $2 + 4\alpha > 1$, cioè se e solo se

$$\alpha > -\frac{1}{4}.$$

Esercizio 3. Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 27}{\left(\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}\right)^2},$$

si calcoli una primitiva di f (sugg.: effettuare la sostituzione $x = t^6$).
Svolgimento. Si ha

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}-27}{\left(\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}\right)^2}\,dx &= 6\int \frac{t^3-27}{(t^3-3t^2)^2}t^5\,dt = 6\int \frac{t^4-27t}{t^2-6t+9}\,dt \\
&= 6\int \frac{t^3+6t^2+9t}{t-3}\,dt = 6\int \left(t^2+6t+27+\frac{81}{t-3}\right)dt \\
&= 6\left(\frac{t^3}{3}+3t^2+27t+81\ln|t-3|\right)+c \\
&= 2\sqrt{x}+18\sqrt[3]{x}+162\sqrt[6]{x}+486\ln|\sqrt[6]{x}-3|+c.
\end{aligned}
$$

Esercizio 4. Esprimere in forma algebrica le soluzioni dell'equazione

$$z^6 - iz^3 + 2 = 0$$

e rappresentarle sul piano di Gauss.
Svolgimento. Poniamo $z = w^3$. L'equazione

$$w^2 - iw + 2 = 0$$

ha per soluzioni $w = (i + \sqrt{-1-8})/2 = (i \pm 3i)/2 = 2i, -i$. Le soluzioni dell'equazione sono perciò le radici cubiche di $2i$ e di $-i$, cioè sono

$$\sqrt[3]{2}e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(\sqrt{3}+i),\ \sqrt[3]{2}e^{i(\pi/6+2\pi/3)} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-\sqrt{3}+i),\ \sqrt[3]{2}e^{i(\pi/6+4\pi/3)} = -\sqrt[3]{2}\,i$$

e

$$e^{i\pi/2} = i,\ e^{i(\pi/2+2\pi/3)} = -\frac{\sqrt{3}+i}{2},\ e^{i(\pi/2+4\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}.$$

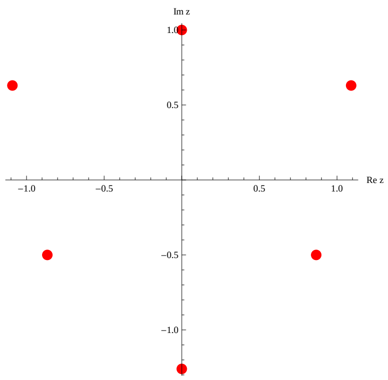


Figura 12: Le soluzioni di $z^6 - iz^3 + 2 = 0$ (Tema 1).

TEMA 2

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) = \ln \cosh x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sinh x|$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, calcolarne i limiti agli estremi del dominio e determinarne gli eventuali asintoti; provare che $f(x) > 0$ se e solo se $x > \frac{\ln(-2+\sqrt{5})}{2}$;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(c) studiarne concavità e convessità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.
Svolgimento. (a) Il dominio è $x \neq 0$. La funzione non presenta simmetrie evidenti e può essere riscritta come

$$f(x) = \ln \frac{\cosh x\sqrt{e^x}}{\sqrt{|\sinh x|}}.$$

Si ha immediatamente che $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty} \ln\frac{e^x \cosh^2 x}{-\sinh x} = -\frac{1}{2}\ln 2.$$

Dunque la retta $y = -\frac{1}{2}\ln 2$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

perché $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sinh x} = 2$.
Per la ricerca dell'asintoto obliquo per $x \to +\infty$ si devono calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln\frac{e^x\cosh^2 x}{\sinh x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{e^{3x}+e^{-x}+2e^x}{2(e^x-e^{-x})}}{2x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{e^{2x}(1+e^{-2x}+e^{-3x})}{2(1-e^{-2x})}}{2x} = 1$$

e poi il limite

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \ln\cosh x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sinh x| = -\frac{1}{2}\ln 2$$

(lo svolgimento di questo limite è nel Tema 1). Perciò $y = x - \frac{1}{2}\ln 2$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
Per lo studio del segno di f, osserviamo che $f(x) \leq 0$ se e solo se

$$\frac{\sqrt{e^x}\,\cosh x}{\sqrt{|\sinh x|}} \geq 1,$$

cioè se e solo se

$$e^x\,\cosh^2 x \geq |\sinh x|. \tag{2}$$

Quest'ultima disequazione, per $x \leq 0$, è equivalente a

$$e^{4x} + 4e^{2x} - 1 \leq 0,$$

che ha per soluzioni $0 \leq x \leq \frac{\ln(-2+\sqrt{5})}{2}$. Per $x > 0$ la disequazione (2) è equivalente a

$$e^{3x} + 3e^{-x} \geq 0,$$

che è sempre vera.
(b) Siccome $\frac{d}{dx}\ln|\sinh x| = \cosh x/\sinh x$ per ogni $x \neq 0$, si ha, per ogni $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{2\sinh^2 x - \cosh^2 x + \sinh x \cosh x}{2\cosh x \sinh x} = \frac{e^{2x}-3}{4\cosh x \sinh x}.$$

Si ha perciò che $f'(x) \leq 0$ se e solo se $0 < x \leq \frac{\ln 3}{2}$. Il punto $\frac{\ln 3}{2}$ è perciò di minimo locale stretto.
(c) Si ha immediatamente

$$f''(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} - \frac{1}{2}\frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{3}{2\cosh^2 x \sinh^2 x} > 0.$$

La funzione è perciò convessa per $x < 0$ e per $x > 0$.
(d) Il grafico è in Figura 3.

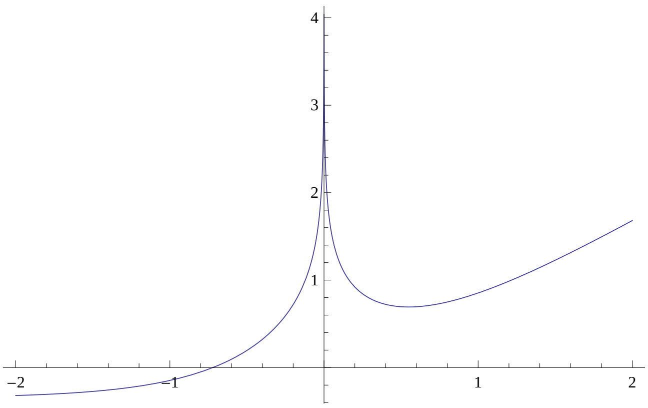


Figura 13: Il grafico di $f(x) = \ln\cosh x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sinh x|$ (Tema 2).

Esercizio 2. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\Big[\frac{1}{12}\frac{1}{n^4} + \cosh\sinh\frac{1}{n} - e^{\frac{1}{2n^2}} - e^{-2n}\cos n\Big]^{\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Utilizzando gli sviluppi asintotici si ha, per $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned}\cosh\sinh\frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2}\sinh^2\frac{1}{n} + \frac{1}{4!}\sinh^4\frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big) = 1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{3!n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)^2 + \frac{1}{4!}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\\ &= 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^4} + \frac{1}{4!}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big) = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{5}{24}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\end{aligned}$$

e

$$e^{\frac{1}{2n^2}} = 1 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{8n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big).$$

Inoltre $e^{-2n}\cos n = o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)$ per $n \to +\infty$. Di conseguenza si ha, per $n \to +\infty$,

$$\frac{1}{12}\frac{1}{n^4} + e^{-2n}\cos n + \cosh\sinh\frac{1}{n} - e^{\frac{1}{2n^2}} = \frac{1}{6}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big).$$

Il termine generale della serie è perciò asintotico a

$$\frac{1}{6^\alpha}\frac{1}{n^{3+4\alpha}}.$$

La serie perciò converge se e solo se $3+4\alpha>1$, cioè se e solo se

$$\alpha>-\frac{1}{2}.$$

Esercizio 3 [8 punti] Data la funzione

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-8}{\left(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}\right)^2},$$

si calcoli una primitiva di f (sugg.: effettuare la sostituzione $x=t^6$).
Svolgimento. Si ha

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x}-8}{\left(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}\right)^2}\,dx &= 6\int\frac{t^3-8}{(t^3-2t^2)^2}t^5\,dt=6\int\frac{t^4-8t}{t^2-4t+4}\,dt\\ &=6\int\frac{t^3+2t^2+4t}{t-2}\,dt=6\int\left(t^2+4t+12+\frac{24}{t-2}\right)dt\\ &=6\left(\frac{t^3}{3}+2t^2+12t+24\ln|t-2|\right)+c\\ &=2\sqrt{x}+12\sqrt[3]{x}+72\sqrt[6]{x}+144\ln|\sqrt[6]{x}-2|+c.\end{aligned}$$

Esercizio 4. Esprimere in forma algebrica le soluzioni dell'equazione

$$z^6+2iz^3+3=0$$

e rappresentarne le soluzioni sul piano di Gauss.
Svolgimento. Poniamo $z=w^3$. L'equazione

$$w^2+2iw+3=0$$

ha per soluzioni $w=-i+\sqrt{-1-3}=-i\pm 2i=i,-3i$. Le soluzioni dell'equazione sono perciò le radici cubiche di i e di $-3i$, cioè sono

$$e^{i\pi/6}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i),e^{i(\pi/6+2\pi/3)}=\frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i),e^{i(\pi/6+4\pi/3)}=-i$$

e

$$\sqrt[3]{3}e^{i\pi/2}=i\sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{3}e^{i(\pi/2+2\pi/3)}=-\sqrt[3]{3}\frac{\sqrt{3}+i}{2},\ \sqrt[3]{3}e^{i(\pi/2+4\pi/3)}=\sqrt[3]{3}\frac{\sqrt{3}-i}{2}.$$

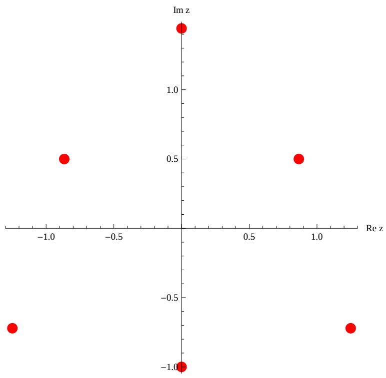


Figura 14: Le soluzioni di $z^6 + 2iz^3 + 3 = 0$ (Tema 2).

2.2 2013, Area dell'Ingegneria dell'Informazione, tutti i canali

Appello del 5.02.2013

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \arcsin \sqrt{1 - 2\log^2 x}.$$

1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.

2) Discutere brevemente la continuità e la derivabilità di f.

3) Calcolare f', determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di estremo.

4) Calcolare i limiti significativi di f'.

5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento. 1) L'argomento x di f deve soddisfare le seguenti condizioni: $x > 0$ (dominio del logaritmo), e $0 \le 1 - 2\log^2 x \le 1$ (dominio della radice e dell'arcoseno). La condizione $1 - 2\log^2 x \ge 0$ dà

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \le \log x \le \frac{1}{\sqrt{2}},$$

cioè il dominio di f è l'intervallo $[e^{-1/\sqrt{2}}, e^{1/\sqrt{2}}]$.
2) f è visibilmente continua nel suo dominio. Le regole di derivazione si possono applicare dove le funzioni elementari di cui f è composizione sono derivabili, cioè dove l'argomento della radice non si annulla ($x \neq e^{-1/\sqrt{2}}, e^{1/\sqrt{2}}$) e dove l'argomento dell'arcoseno è diverso da ± 1 ($x \neq 1$). La funzione risulta perciò di classe $\mathcal{C}^1$ negli intervalli $]e^{-1/\sqrt{2}}, 1[$ e $]1, e^{1/\sqrt{2}}[$.
3) Si ha

$$f'(x) = \frac{-4\log x}{x} \frac{1}{2\sqrt{1 - 2\log^2 x}} \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - 2\log^2 x)}} = -\sqrt{2}\frac{\text{sign}(\log x)}{x\sqrt{1 - 2\log^2 x}}.$$

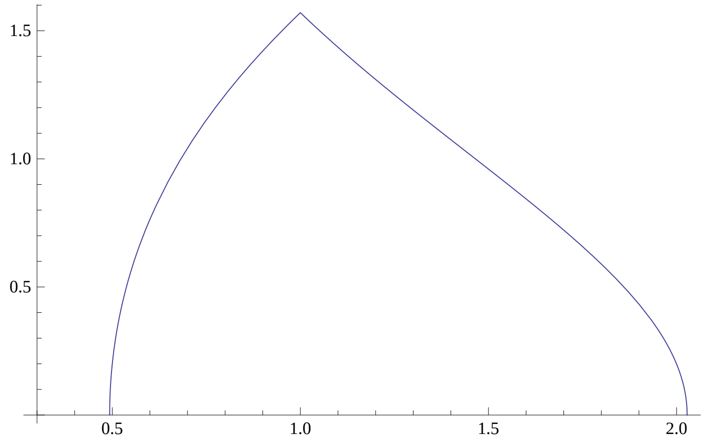


Figura 15: Il grafico di f (Tema 1).

Il segno di f' dipende perciò solo dal segno di $\log x$, quindi f è strettamente crescente in $[e^{-1/\sqrt{2}}, 1]$ e strettamente decrescente in $[1, e^{1/\sqrt{2}}]$. Gli estremi del dominio sono perciò punti di minimo assoluto (in cui f vale 0), mentre $x = 1$ è il punto di massimo assoluto (in cui f vale $\pi/2$).
4) $\lim_{x \to e^{-1/\sqrt{2}}+} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x \to e^{1/\sqrt{2}}-} f'(x) = -\infty$, cioè agli estremi del dominio la tangente al grafico di f è verticale. Inoltre si ha $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \sqrt{2} = -\lim_{x \to 1^+} f'(x)$, cioè $x = 1$ è un punto angoloso.
5) La derivata seconda non era richiesta, ma per completezza viene calcolcta e studiata. Per $x \in]e^{-1/\sqrt{2}}, 1[$ si ha

$$f''(x) = \sqrt{2} \frac{-\left(\sqrt{1 - 2\log^2 x} + x \frac{-4\log x}{2x\sqrt{1-2\log^2 x}}\right)}{x^2(1 - 2\log^2 x)} = \sqrt{2} \frac{2\log^2 x + 2\log x - 1}{x^2(1 - 2\log^2 x)^{3/2}},$$

mentre per $x \in]1, e^{1/\sqrt{2}}[$ è l'opposto. Il segno di f'' dipende perciò solo dal segno di $2\log^2 x + 2\log x - 1$. Le soluzioni della disequazione $2\log^2 x + 2\log x - 1 \geq 0$ sono: $x \leq e^{-(1+\sqrt{3})/2}$ e $x \geq e^{(-1+\sqrt{3})/2}$. Tenendo conto del fatto che $e^{-(1+\sqrt{3})/2} < e^{-1/\sqrt{2}} < 1 < e^{(-1+\sqrt{3})/2} < e^{1/\sqrt{2}}$, f risulta concava in $[e^{-1/\sqrt{2}}, 1]$, convessa in $[1, e^{(-1+\sqrt{3})/2}$, concava in $[e^{(-1+\sqrt{3})/2}, e^{1/\sqrt{2}}]$, con un flesso a tangente obliqua in $e^{(-1+\sqrt{3})/2}$.
Il grafico è perciò come in Figura 2.2.

Esercizio 2 Al variare di $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{4x}{1+x^2}\right)^n.$$

Svolgimento. Usiamo il criterio della radice, dal quale ricaviamo informazioni sia sulla convergenza assoluta che sull'andamento del termine generale, che chiamiamo $a_n(x)$. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \left|\frac{4x}{1+x^2}\right| = \left|\frac{4x}{1+x^2}\right|.$$

Perciò se $\left|\frac{4x}{1+x^2}\right| < 1$ la serie converge assolutamente e quindi semplicemente, mentre se $\left|\frac{4x}{1+x^2}\right| > 1$ la serie non converge né assolutamente né semplicemente perché il suo termine generale non è infinitesimo. La disequazione $\left|\frac{4x}{1+x^2}\right| < 1$, è equivalente al sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \frac{4x}{1+x^2} & < 1 \\ \frac{4x}{1+x^2} & > -1. \end{cases}$$

La prima disequazione ha per soluzioni $]-\infty, 2-\sqrt{3}[\cup]2+\sqrt{3},+\infty[$. Per disparità le soluzioni del sistema, cioè i valori di x in cui la serie converge assolutamente, sono

$$]-\infty,-2-\sqrt{3}[\cup]-2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}[\cup]2+\sqrt{3},+\infty[,$$

mentre il termine generale non è infinitesimo per i valori di x appartenenti all'insieme

$$]-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}[\cup]2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}[.$$

Resta da studiare la convergenza della serie nei punti $x_1 := -2-\sqrt{3}$, $x_2 := -2+\sqrt{3}$, $x_3 := 2-\sqrt{3}$, $x_4 := 2+\sqrt{3}$, nei quali $\sqrt[n]{|a_n(x)|} \to 1$ e quindi il criterio della radice non dà informazioni. Per $x = x_1, x_2$ il termine generale della serie risulta essere $(-1)^n/(n+1)$ e quindi la serie converge per il criterio di Leibniz, ma non converge assolutamente perché il termine generale, in modulo, è asintotico al termine generale della serie armonica, $1/n$, che diverge. Per $x = x_3, x_4$ il termine generale è $1/(n+1)$ e quindi la serie non converge.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 8}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-3}\, dx.$$

Svolgimento. Detta f l'integranda, essa è definita (e continua) per $e^x \neq 3$. Dunque $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}\backslash\{\log 3\})$. In particolare $f \in \mathcal{C}([\log 8,+\infty[)$ e quindi è integrabile secondo Riemann in $[\log 8,+\infty[$. Per il calcolo dell'integrale calcoliamo anzitutto una primitiva di $f(x) = \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-3}$. Sembra naturale il cambio di variabile $y = \sqrt{e^x+1}$, cioè $e^x = y^2-1$, $x = \log(y^2-1)$, $dx = \frac{2y}{y^2-1}\, dy$ da cui

$$\int \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-3}\, dx = \int \frac{y}{y^2-4}\frac{2y}{y^2-1}\, dy = 2\int \frac{y^2-1+1}{(y^2-4)(y^2-1)}\, dy = 2\left(\int \frac{1}{y^2-4}\, dy + \int \frac{1}{(y^2-4)(y^2-1)}\, dy\right).$$

Evidentemente

$$\int \frac{1}{y^2-4}\, dy = \int \frac{1}{(y-2)(y+2)}\, dy = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2}\right)\, dy = \frac{1}{4}\log\left|\frac{y-2}{y+2}\right|,$$

mentre

$$\int \frac{1}{(y^2-4)(y^2-1)}\, dy = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{y^2-4} - \frac{1}{y^2-1}\right)\, dy = \frac{1}{12}\log\left|\frac{y-2}{y+2}\right| - \frac{1}{6}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right|$$

e quindi, in conclusione

$$\int \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-3}\, dx = \frac{2}{3}\log\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-2}{\sqrt{e^x+1}+2}\right| - \frac{1}{3}\log\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| =: F(x).$$

Ora $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ come facilmente si verifica, per cui

$$\int_{\log 8}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-3}\, dx = -F(\log 8) = -\left(\frac{2}{3}\log\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\log\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\log 5 - \frac{1}{3}\log 2.$$

Esercizio 4 Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{2z+1}{2z-1}\right)^3 = 1,$$

scriverle in forma algebrica e rappresentarle nel piano complesso.
Svolgimento. Le tre radici cubiche di 1 sono $1, e^{\frac{2}{3}\pi i}, e^{-\frac{2}{3}\pi i}$. L'equazione è equivalente alle tre equazioni

$$\frac{2z+1}{2z-1} = 1, \ \frac{2z+1}{2z-1} = e^{\frac{2}{3}\pi i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \ \frac{2z+1}{2z-1} = e^{-\frac{2}{3}\pi i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

La prima equazione non ha soluzioni. La seconda è equivalente all'equazione

$$2z+1 = (2z-1)(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i),$$

che ha per soluzioni

$$z = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{3 - i\sqrt{3}} = -i\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

La terza equazione è equivalente all'equazione

$$2z+1 = (2z-1)(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i),$$

che ha per soluzioni

$$z = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{3 + i\sqrt{3}} = i\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Esercizio 5 [facoltativo] Sia $f \in C([0,1])$ una funzione continua. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx.$$

Svolgimento. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e osserviamo che $f \in \mathcal{C}(\left[\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right])$. Dunque possiamo applicare il teorema della media integrale alla funzione f nell'intervallo $\left[\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right]$: esiste $\xi_n \in \left[\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right]$ tale che

$$\int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx = f(\xi_n)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Dato che $\xi_n \in \left[\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right]$ per ogni n, otteniamo che $\lim_n \xi_n = 0$ e dato che f è continua in 0, si ha che $\lim_n f(\xi_n) = f(0)$. Quindi

$$\lim_n n \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx = \lim_n \left[f(\xi_n)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] = f(0).$$

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \arcsin\sqrt{1 - \frac{\log^2 x}{2}}.$$

1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.

2) Discutere brevemente la continuità e la derivabilità di f.

3) Calcolare f', determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di estremo.

4) Calcolare i limiti significativi di f'.

5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento. Per la presenza del log dobbiamo porre $x > 0$, inoltre per la radice dobbiamo porre $1 - \frac{\log^2 x}{2} \geq 0$ e per l'arcsin abbiamo $1 - \frac{\log^2 x}{2} \leq 1$. Risolvendo otteniamo che il dominio è dato da

$$\mathcal{D} = \left\{ x \in \left[\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}, \mathrm{e}^{\sqrt{2}} \right] \right\}$$

Poiché l'argomento di arcsin è non negativo anche la funzione è non negativa nel suo dominio.
2) Essendo la funzione una composizione di funzioni continue è continua nel suo dominio. Per la derivabilità possiamo solo affermare che la funzione è derivabile in $\mathcal{D}' = \left(\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}, \mathrm{e}^{\sqrt{2}} \right) \setminus \{1\}$. Il punto 1 deve essere tolto per la presenza dell'arcsin, gli estremi del dominio per la radice.
3) Per ogni $x \in \mathcal{D}'$ un calcolo diretto porge

$$f'(x) = -\frac{\text{segno}(\log x)}{x\sqrt{2 - \log^2 x}}$$

Il segno è quindi deciso dalla funzione segno$(\log x)$. La funzione è crescente in $\left[\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}, 1 \right]$ ed è decrescente in $\left[1, \mathrm{e}^{\sqrt{2}} \right]$. Il punto $x_1 = 1$ è un punto di massimo (assoluto), i punti $x_2 = \mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$ e $x_3 = \mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ sono punti di minimo (assoluto).
4) come descritto nel punto 2) i limiti significativi di f' sono:

$$\lim_{x \to x_1^+} f'(x) = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \to x_1^-} f'(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \to x_2^+} f'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_3^-} f'(x) = -\infty$$

Quindi il punto x_1 è un punto angoloso, i punti x_2 e x_3 sono punti di cuspide. Il grafico è perciò come in Figura 2.2.
Esercizio 2 Al variare di $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{-8x}{4 + x^2} \right)^n.$$

Usiamo il criterio della radice, dal quale ricaviamo informazioni sia sulla convergenza assoluta che sull'andamento del termine generale. Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \left| \frac{-8x}{4 + x^2} \right|^n} = \left| \frac{-8x}{4 + x^2} \right| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}} = \left| \frac{-8x}{4 + x^2} \right|$$

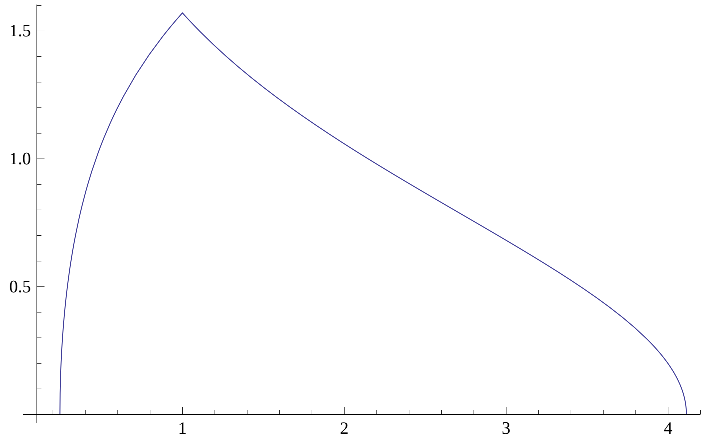


Figura 16: Il grafico di f (Tema 2).

Per il criterio della radice abbiamo convergenza assoluta (e quindi anche semplice) per ogni x per cui $\left|\frac{-8x}{4+x^2}\right| < 1$ cioè

$$\begin{cases} \frac{-8x}{4+x^2} < 1 \\ \\ \frac{-8x}{4+x^2} > -1 \end{cases}$$

Risolvendo il semplice sistema otteniamo convergenza assoluta (e quindi anche semplice) in

$$\mathcal{C} = \left(-\infty, -4-2\sqrt{3}\right) \bigcup \left(-4+2\sqrt{3}, 4-2\sqrt{3}\right) \bigcup \left(4+2\sqrt{3}, +\infty\right)$$

Il termine generale della serie non è infinitesimo e quindi la serie non converge in

$$\mathbb{R}\backslash\overline{\mathcal{C}} = \left(-4-2\sqrt{3}, -4+2\sqrt{3}\right) \bigcup \left(4-2\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3}\right)$$

Rimane da studiare il comportamento della serie nei punti $x_1 = -4-2\sqrt{3}$, $x_2 = -4+2\sqrt{3}$, $x_3 = 4-2\sqrt{3}$ e $x_4 = 4+2\sqrt{3}$. Per $x = x_1$ o $x = x_2$ abbiamo che $\frac{-8x}{4+x^2} = 1$ e quindi il termine generico della serie diventa $\frac{1}{n}$ cioè la serie diverge a $+\infty$ in questi punti, mentre in $x = x_3$ o $x = x_4$ abbiamo che $\frac{-8x}{4+x^2} = -1$ e quindi il termine generico della serie diventa $(-1)^n\frac{1}{n}$. In tali punti abbiamo convergenza semplice (criterio di Leibniz), ma non assoluta.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\, dx.$$

Svolgimento. Detta f l'integranda, essa è definita (e continua) per ogni $x \geq 0$. In particolare $f \in \mathcal{C}([0,+\infty[)$ e quindi è integrabile secondo Riemann in $[0,+\infty[$. Per il calcolo dell'integrale calcoliamo anzitutto una primitiva di $f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x+5}$. Sembra naturale il cambio di variabile $y = \sqrt{e^x-1}$, cioè $e^x = y^2+1$, $x = \log(y^2+1)$, $dx = \frac{2y}{y^2+1}\, dy$ da cui

$$\int \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\, dx = \int \frac{y}{y^2+4}\frac{2y}{y^2+1}\, dy = 2\int \frac{y^2+4-4}{(y^2+4)(y^2+1)}\, dy = 2\left(\int \frac{1}{y^2+1}\, dy - 4\int \frac{1}{(y^2+4)(y^2+1)}\, dy\right).$$

Evidentemente

$$\int \frac{1}{y^2+1}\, dy = \arctan y,$$

mentre

$$\int \frac{1}{(y^2+4)(y^2+1)}\,dy = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{y^2+4}\right) = \frac{1}{3}\left(\arctan y - \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(y/2)^2}\,dy\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\arctan y - \frac{1}{2}\arctan\frac{y}{2}\right).$$

Pertanto

$$\int \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx = -\frac{2}{3}\arctan\sqrt{e^x-1} + \frac{4}{3}\arctan\frac{\sqrt{e^x-1}}{2} =: F(x).$$

Ora $F(0) = 0$ come facilmente si verifica, per cui

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-3}\,dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{3}.$$

Esercizio 4 Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{2z+1}{1-2z}\right)^3 = -1,$$

scriverle in forma algebrica e rappresentarle nel piano complesso.

Svolgimento. Le tre radici cubiche di -1 sono $w_1 = -1$, $w_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ e $w_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. L'equazione è equivalente alle tre equazioni

$$\frac{2z+1}{1-2z} = -1, \qquad \frac{2z+1}{1-2z} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{2z+1}{1-2z} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

La prima non ha soluzioni, la seconda ha come soluzione $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}i$, la terza ha come soluzione $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{6}i$. Il grafico segue:

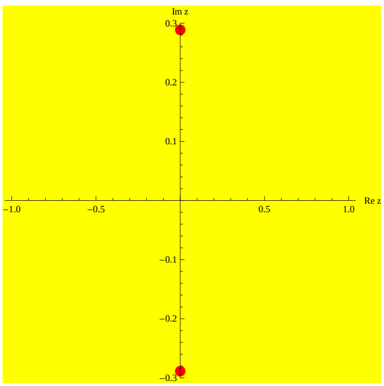


Figura 17: Le soluzioni di $\left(\frac{2z+1}{1-2z}\right)^3 = -1$ (Tema 2).

5) Per il facoltativo si veda il Tema 1.

Appello del 20.02.2013

TEMA 1

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x) = x\left|3 + \frac{1}{\log(2x)}\right|,$$

(a) determinarne il dominio, calcolarne i limiti agli estremi e determinare eventuali asintoti;
(b) studiarne la prolungabilità agli estremi del dominio e la derivabilità;
(c) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(d) calcolare i limiti significativi di f';
(e) disegnare un grafico qualitativo di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento. (a) Il dominio è $x > 0$, $x \neq \frac{1}{2}$. Si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 1} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty,$$

per cui $x = 1$ è un asintoto verticale. Siccome

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3,\ \lim_{x\to +\infty} f(x) - 3x = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\log 2x} = +\infty,$$

non ci sono asintoti obliqui.
(b) Siccome $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, la funzione è prolungabile con continuità in $x = 0$. È anche derivabile in tutti i punti del dominio in cui non si annulla l'argomento del modulo, cioè per x nel dominio, $x \neq \frac{e^{-1/3}}{2}$.
(c) Per tali x si ha:

$$f'(x) = \left|3 + \frac{1}{\log(2x)}\right| + x \operatorname{sign}\left(3 + \frac{1}{\log(2x)}\right) \frac{-1}{x\log^2(2x)}.$$

Siccome

$$3 + \frac{1}{\log(2x)} > 0 \Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{e^{-1/3}}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[,$$

si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 3 + \frac{1}{\log(2x)} - \frac{1}{\log^2(2x)} = \frac{3\log^2(2x)+\log(2x)-1}{\log^2(2x)} & \text{per} \quad \left]0, \frac{e^{-1/3}}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\\ -3 - \frac{1}{\log(2x)} + \frac{1}{\log^2(2x)} = \frac{-3\log^2(2x)-\log(2x)+1}{\log^2(2x)} & \text{per} \quad x \in \left]\frac{e^{-1/3}}{2}, \frac{1}{2}\right[. \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione $3\log^2(2x) + \log(2x) - 1 = 0$ sono $e^{\frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}}/2$ e si ha

$$\frac{e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{6}}}{2} < \frac{e^{-1/3}}{2} < \frac{1}{2} < \frac{e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{6}}}{2},$$

per cui

x	$\left]0, \frac{e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{6}}}{2}\right[$	$\left]\frac{e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{6}}}{2}, \frac{e^{-1/3}}{2}\right[$	$\left]\frac{e^{-1/3}}{2}, \frac{1}{2}\right[$	$\left]\frac{1}{2}, \frac{e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{6}}}{2}\right[$	$\left]\frac{e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{6}}}{2}, +\infty\right[$
$\operatorname{sgn} f'$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

e quindi $\frac{e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{6}}}{2}$ è un punto di massimo locale stretto, 0 e $\frac{e^{-1/3}}{2}$ sono punti di minimo assoluto, mentre $\frac{e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{6}}}{2}$ è un punto di minimo locale stretto.
(d) I limiti significativi di f' sono

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 3,\quad \lim_{x\to \frac{e^{-1/3}}{2}^-} f'(x) = -9,\quad \lim_{x\to \lim_{x\to \frac{e^{-1/3}}{2}^-} f'(x) = -3^+} f'(x) = 9,$$

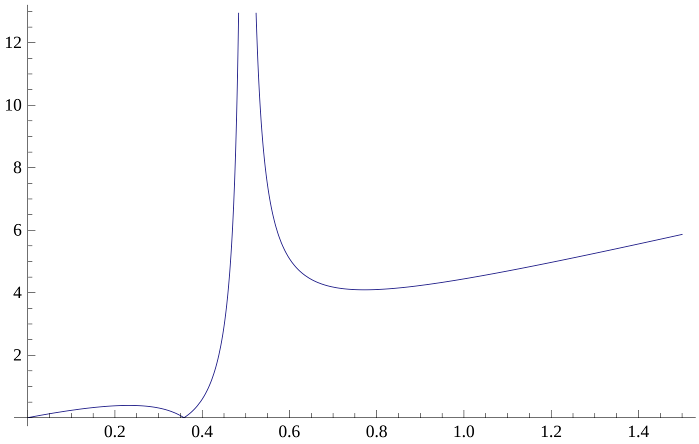


Figura 18: Il grafico di f (Tema 1).

per cui $\frac{e^{-1/3}}{2}$ è un punto angoloso.
(e) Il grafico è come in figura 2.2

Esercizio 2 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{7/2}\,\log^2 x - 1 + \sin x^2 + \cos\left(1 - e^{\sqrt{2}\,x}\right)}{\sinh x - x^\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.
Svolgimento. Gli sviluppi di McLaurin danno, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}
\sin x^2 &= x^2 + o(x^5),\\
\cos\left(1 - e^{\sqrt{2}\,x}\right) - 1 &= -\frac{1}{2}\left(1 - e^{\sqrt{2}\,x}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(1 - e^{\sqrt{2}\,x}\right)^4 + o(x^4)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\,x + x^2 + o(x^2)\right)^2\\
&= -x^2 - \sqrt{2}\,x^3 + o(x^3),\\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^4),\\
x^{7/2}\,\log x &\sim x^4\,\log^2 x = o(x^3).
\end{aligned}$$

Perciò il numeratore è

$$-\sqrt{2}\,x^3 + o(x^3), \quad x \to 0,$$

mentre il denominatore, per $x \to 0$, è

$$\begin{array}{ll}
x^\alpha + o(x^\alpha) & \text{se } 0 < \alpha < 1\\
\dfrac{x^3}{6} + o(x^3) & \text{se } \alpha = 1\\
x + o(x) & \text{se } \alpha > 1.
\end{array}$$

Si ha perciò

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x^4\,\log x - 1 + \sin x^2 + \cos\left(1 - e^{\sqrt{2}\,x}\right)}{\sinh x - x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sqrt{2}\,x^3 + o(x^3)}{\sinh x - x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \alpha \neq 3\\ -6\sqrt{2} & \text{se} \quad \alpha = 3.\end{cases}$$

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \sin\frac{1}{x}\, dx$$

Svolgimento. Con la sostituzione $y = 1/x$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \sin\frac{1}{x}\, dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_{\frac{2}{\pi}}^{b} \frac{1}{x^4} \sin\frac{1}{x}\, dx \\
&= -\lim_{b\to+\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{b}} y^2 \sin y\, dy = \lim_{c\to0^+} \int_{c}^{\frac{\pi}{2}} y^2 \sin y\, dy \\
&= -y^2 \cos y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2y \cos y\, dy \\
&= 2y \sin y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y\, dy \\
&= \pi - 2.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Risolvere l'equazione

$$\left|z^2\big(z - \overline{(z-4i)}\big)\right| = \left|z\overline{z} - z(z-4i)\right|$$

e disegnare le soluzioni nel piano complesso.
Svolgimento. Si ha

$$\begin{aligned}
\left|z^2\big(z - \overline{(z-4i)}\big)\right| &= |z|\,\left|z\big(z - \overline{(z-4i)}\big)\right| = |z|\,\left|z\big(z - (\overline{z}+4i)\big)\right| = |z|\,\left|z(2i\,\mathrm{Im}z - 4i)\right| \\
\left|z\overline{z} - z(z-4i)\right| &= |z|\,\left|\overline{z} - (z-4i)\right| = |z|\,\left|4i - 2i\,\mathrm{Im}z\right|,
\end{aligned}$$

per cui $z = 0$ è una soluzione. Se $z \neq 0$ l'equazione diventa

$$|z|\,\left|\mathrm{Im}z - 2\right| = \left|\mathrm{Im}z - 2\right|,$$

che ha per soluzioni $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}z = 2\}$. Le soluzioni sono in figura 2.2.

Esercizio 5 [facoltativo] Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua e crescente. Sia

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt, \quad x > 0.$$

Si provi che g è crescente.
Svolgimento. La funzione g è derivabile e si ha

$$g'(x) = \frac{-1}{x^2}\int_0^x f(t)\, dt + \frac{1}{x} f(x) = \frac{1}{x}\big(f(x) - g(x)\big).$$

Per il teorema della media integrale, per ogni $x > 0$ esiste $\xi_x \in [0, x]$ tale che $g(x) = f(\xi_x)$. Siccome f è crescente, ne segue che $g(x) \leq f(x)$, per cui $g'(x) \geq 0$.

TEMA 2

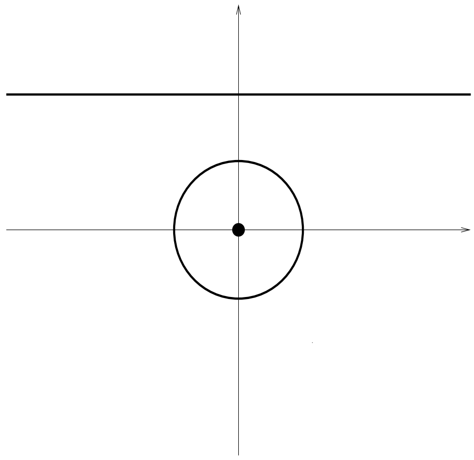


Figura 19: Le soluzioni dell'esercizio 4 (Tema 1).

Esercizio 1 Data la funzione
$$f(x) = x\left|2 - \frac{1}{\log(3x)}\right|,$$
(a) determinarne il dominio, calcolarne i limiti agli estremi e determinare eventuali asintoti;
(b) studiarne la prolungabilità agli estremi del dominio e la derivabilità;
(c) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(d) calcolare i limiti significativi di f';
(e) disegnarne un grafico qualitativo di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).
Svolgimento.

(a) Il dominio è dato da $x > 0$ (per la presenza del log) e $3x \neq 0$ (perché log è al denominatore). Quindi chiamando $\mathcal{D}$ il dominio abbiamo
$$\mathcal{D} = \mathbb{R}_+ \setminus \{\frac{1}{3}\}.$$
Per quanto riguarda il segno è evidente che $f \geq 0$ sul dominio. Limiti notevoli: si calcola facilmente che
$$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{possibili asintoti obliqui}$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 = m$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) - 2x = -\infty$$
Quindi non ci sono asintoti obliqui, né orizzontali ma un asintoto verticale in $x = 1$.

(b) Come visto nel punto (a) c'è un prolungamento per continuità in $x = 0$ ponendo la funzione f uguale a 0 nel punto 0. Con questo prolungamento la funzione è continua in

$$\mathcal{A} = \mathcal{D} \cup \{0\}.$$

Per il calcolo della derivata prima per la presenza del valore assoluto dobbiamo porre $2 - \dfrac{1}{\log 3x} \neq 0$ cioè $x \neq \dfrac{\sqrt{e}}{3} = x_1$. Nota che $f(x_1) = 0$ e quindi per quanto detto x_1 è un punto di minimo assoluto.

(c) e (d) Un calcolo diretto mostra che $\forall x \in \mathcal{D}\backslash\{x_1\}$

$$f'(x) = \left|2 - \frac{1}{\log 3x}\right| + x\text{segno}\left(2 - \frac{1}{\log 3x}\right) \cdot \frac{1}{\log^2 3x}\frac{1}{x} = \left|2 - \frac{1}{\log 3x}\right| + \text{segno}\left(2 - \frac{1}{\log 3x}\right) \cdot \frac{1}{\log^2 3x}$$

Poiché per definizione di x_1 l'argomento del valore assoluto si annulla e segno$\left(2 - \frac{1}{\log 3x}\right) = 1$ se $x \in \left(0, \dfrac{1}{3}\right) \bigcup (x_1 + \infty) = \mathcal{P}$ e segno$\left(2 - \frac{1}{\log 3x}\right) = -1$ se $x \in \left(\frac{1}{3}, x_1\right) = \mathcal{N}$ abbiamo l'attacco di f in x_1

$$\lim_{x \to x_1^{\pm}} f'(x) = \pm 4$$

x_1 è quindi un punto di minimo assoluto e punto angoloso. Vediamo anche l'attacco (destro) in 0. Si ottiene subito che

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 2$$

e quindi il prolungamento in 0 è anche $\mathcal{C}^1$. Il punto 0 è un altro punto di minimo assoluto.

Per quanto riguarda il segno è evidente che se $x \in \mathcal{P}$ $f'(x) > 0$ e quindi la funzione è qui monotona strettamente crescente. Per $x \in \mathcal{N}$ si vede con un breve calcolo che $f'(x) < 0$ e quindi la funzione è in questo insieme strettamente monotona decrescente.

(e) Il grafico segue:

Esercizio 2 Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x^2 + \cos\log(1 + \sqrt{2}x) - 1 + x^{13/4}\ \log^2 x}{\sin x - x^{\alpha}}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.
Svolgimento. Sviluppiamo i termini al numeratore $\sin x^2 = x^2 + o(x^5)$,

$$\cos(1 + \log(\sqrt{2}x) = \cos\left(\sqrt{2}x - x^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}x^3 + o(x^3)\right) = 1 - x^2 + \sqrt{2}x^3 + o(x^3)$$

Notiamo inoltre che $x^{13/4}\ \log^2 x = o(x^3)$ e quindi il numeratore diventa uguale a $\sqrt{2}x^3$ e quindi se $\alpha < 1$ oppure $\alpha > 1$ il limite vale 0. Se $\alpha = 1$ allora il denominatore diventa $-\dfrac{x^3}{6}$ e quindi per il PSI il limite per $\alpha = 1$ vale $-6\sqrt{2}$.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \cos\frac{1}{x}\, dx$$

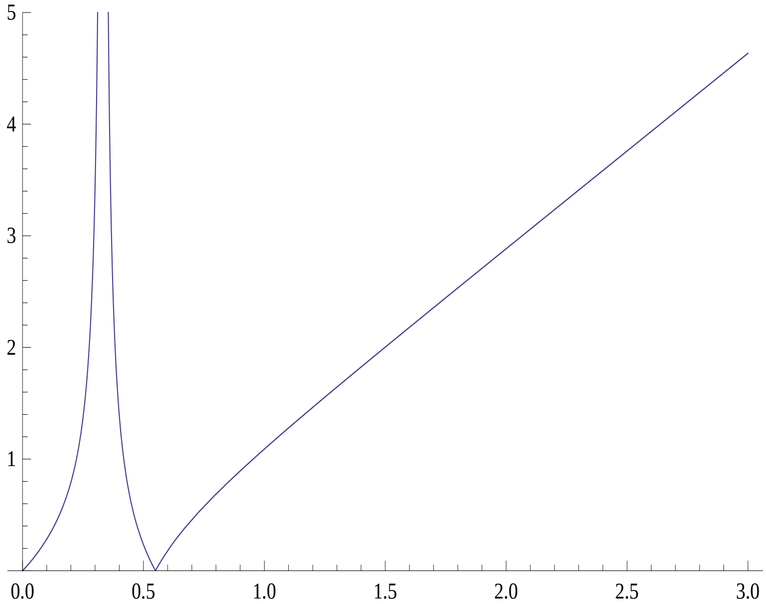


Figura 20: Il grafico di $f(x) = x\left|2 - \frac{1}{\log(3x)}\right|$ (Tema 2).

Svolgimento. Integriamo prima per sostituzione ponendo $\frac{1}{x} = t$ l'integrale diventa allora

$$\int_0^{\pi} t^2 \cos t \, dt$$

Integrando due volte per parti abbiamo

$$\int t^2 \cos t \, dt = 2t \cos t + (t^2 - 2) \sin t$$

Sostituendo gli estremi di integrazione otteniamo

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \cos \frac{1}{x} \, dx = \int_0^{\pi} t^2 \cos t \, dt = -2\pi$$

Esercizio 4 Risolvere l'equazione

$$|z^2\big(z - \overline{(z-2i)}\big)| = |z\overline{z} - z(z-2i)|$$

e disegnare le soluzioni nel piano complesso.
Svolgimento. Scrivendo $z = x + iy$ e svolgendo alcuni semplici calcoli otteniamo che il primo membro diventa

$$2|y-1|(x^2+y^2)$$

mentre il secondo diventa

$$2\sqrt{x^2+y^2}|y-1|$$

Perciò l'equazione di partenza diventa

$$|y-1|\sqrt{x^2+y^2} = |y-1|(x^2+y^2)$$

Quindi se $y \neq 1$ e $z \neq 0$ l'equazione diventa equivalente a $x^2+y^2=1$ che è l'equazione di una circonferenza di raggio 1 senza il punto $y=1$. Se $y=1$ l'equazione è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$ infine abbiamo la soluzione $z=0$. Ricapitolando, le soluzioni sono $z=x+i$ e $z=cos\theta+i\sin\theta$ con $\theta\in[0,2\pi)$ e $z=0$. Il grafico segue:

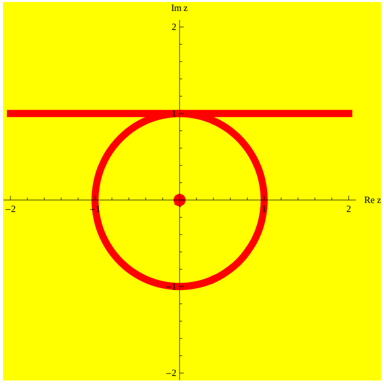


Figura 21: Le soluzioni di $\left|z^2\left(z-\overline{(z-2i)}\right)\right| = \left|z\overline{z}-z(z+2i)\right|$ (Tema 2).

5) Per il facoltativo si veda il Tema1.

Appello del 15.07.2013

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\cosh x - \log|\sinh x - 1|.$$

1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.
2) Calcolare i limiti significativi e gli eventuali asintoti di f.
3) Calcolare f', determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo o minimo relativi o assoluti.
4) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento.

1) Il dominio della funzione è dato da $\sinh x \neq 1$ cioè $x \neq \log\left(1+\sqrt{2}\right)$. Per quanto riguarda il segno, la funzione è positiva se e solo se $\log\dfrac{\cosh x}{|\sinh x - 1|} > 0$ quindi se e solo se $\dfrac{\cosh x}{|\sinh x - 1|} > 1$ che è equivalente a $\mathrm{e}^{2x}+1 > |\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x-1|$. Per $x > \log(1+\sqrt{2})$ la disuguaglianza è evidente e quindi la funzione è positiva. Per $x < \log(1+\sqrt{2})$ la disuguaglianza sopra diventa $\mathrm{e}^x - 1 > 0$ cioè $x > 0$. In definitiva $f(x) > 0$ se e solo se $x > 0$.

2) Vediamo i limiti significativi. È immediato vedere che

$$\lim_{x\to\log(1+\sqrt{2})} f(x) = +\infty$$

abbiamo ora

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \log\left(\frac{e^{2x}+1}{|e^{2x}-2e^x-1|}\right) = 0$$

perché sia a $+\infty$ che a $-\infty$ l'argomento del log tende a 1. Per quanto calcolato la retta $y=0$ è asintoto orizzontale, mentre la retta $x = \log(1+\sqrt{2})$ è asintoto verticale completo.

3) La funzione è evidentemente (continua e) derivabile nel suo dominio, cioè in $\dfrac{\mathbb{R}}{\log(1+\sqrt{2})}$. Un calcolo facile mostra che

$$f'(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} - \frac{\cosh x)}{\sinh x - 1} = \frac{1+\sinh x}{\cosh x(1-\sinh x)}$$

Per $x > \log(1+\sqrt{2})$, evidentemente $f'(x) < 0$ e quindi la funzione è decrescente (strettamente). Per $x \in \big(0, \log(1+\sqrt{2})\big)$ è sempre evidente che $f'(x) > 0$ e quindi la funzione è crescente, Per $x < 0$ il segno è determinato da $1+\sinh x$. E perciò la funzione è crescente se e solo se $e^{2x} + 2e^x - 1 > 0$ cioè $x \in (\log(\sqrt{2}-1), 0)$. Perciò $x = \log(\sqrt{2}-1)$ è un punto di minimo (assoluto).

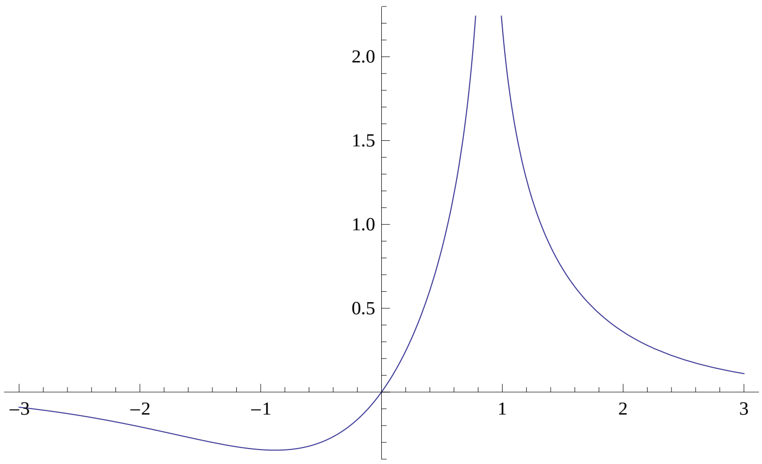


Figura 22: Grafico funzione $f(x) = \log\cosh x - \log|\sinh x - 1|$. .

Esercizio 2

a) Dato il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0, \tag{1}$$

calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2 + \log(n!) + \cos n\right)\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1)\right).$$

b) [FACOLTATIVO] Dimostrare (1).

Svolgimento. Si ha

$$\log(n!) = \log n + \log(n-1) + \ldots + \log 2 = \sum_{k=1}^{n} \log k \le n\log n.$$

Siccome $\log n = o(n)$ per $n \to \infty$, allora $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0$.
Da (1) e dal fatto che $\cos n$ è limitato, e quindi $\cos n = o(n^2)$ per $n \to \infty$, si ha subito che

$$n^2 + \log(n!) + \cos n \sim n^2 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Si ha inoltre, per $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1) &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\left(\log n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{\log n}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

siccome $\log n/n^3 = o(n^3)$. Analogamente, si ha

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1) &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\left(\log n - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{\log n}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

per $n \to \infty$. Quindi

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1) = \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

per $n \to \infty$. In sintesi, si ha

$$\begin{aligned}\left(n^2 + \log(n!) + \cos n\right)\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1)\right) &= \left(n^2 + o(n^2)\right)\left(\frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &\to 2 \quad \text{per } n \to \infty.\end{aligned}$$

Esercizio 3
a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2\alpha x} - 1}{e^{2x} + 1}\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) Calcolarlo per $\alpha = 1/2$.
Svolgimento. a) L'integranda è continua ed ha segno costante in $[0, +\infty)$, per cui la convergenza può essere studiata mediante il criterio del confronto asintotico. Si ha, per $x \to +\infty$, se $\alpha > 0$,

$$\frac{e^{2\alpha x} - 1}{e^{2x} + 1} \sim \frac{1}{e^{2(1-\alpha)x}}$$

e

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{2(1-\alpha)x}}\,dx < +\infty$$

se e solo se $\alpha < 1$. Per $\alpha \le 0$ si ha $\frac{|e^{2\alpha x}-1|}{e^{2x}+1} \le \frac{1}{e^{2x}}$. Quindi l'integrale richiesto converge se e solo se $\alpha < 1$.
b) Ponendo $t = \log x$ si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{t - 1}{(t^2 + 1)t}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{t - 1}{t^3 + t}\,dt.$$

Utilizzando la scomposizione

$$\frac{t-1}{t^3+t} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{-1}{t} + \frac{t+1}{t^2+1},$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t^3+t} dt &= \int_1^{+\infty} \frac{-1}{t} + \frac{t+1}{t^2+1}\, dt \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{-1}{t} + \frac{1}{2}\frac{2t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1}\, dt \\
&= \lim_{t\to+\infty} \log\frac{\sqrt{t^2+1}}{t} - \frac{\log 2}{2} + \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\log 2}{2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^5 = -16\overline{z}$$

esprimendole prima in forma trigonometrica/esponenziale e poi in forma algebrica; disegnarle infine sul piano di Gauss.

Svolgimento. Poniamo $z = \rho e^{i\vartheta}$. Chiaramente $z = 0$ è una soluzione, per cui cerchiamo le soluzioni non nulle. Prendendo il modulo di entrambi i membri dell'equazione si ottiene

$$\rho^5 = 16\rho,$$

da cui $\rho = 2$, cioè $z = 2e^{i\vartheta}$. Quindi

$$2^5 e^{5i\vartheta} = 2^4 e^{i\pi} 2e^{-i\vartheta},$$

da cui

$$e^{6i\vartheta} = e^{i\pi},$$

cioè

$$\vartheta = \pi/6 + k\pi/3, \quad k = 0, \dots, 5.$$

Quindi le soluzioni non nulle dell'equazione sono

$$\begin{aligned}
2e^{i\pi/6} = \sqrt{3}+i,\ 2e^{i\pi/2} = 2i,\ 2e^{i5\pi/6} = -\sqrt{3}+i, \\
2e^{i7\pi/6} = -\sqrt{3}-i,\ 2e^{3i\pi/2} = -2i,\ 2e^{i11\pi/6} = \sqrt{3}-i
\end{aligned}$$

(v. figura).

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log|\sinh x - 2| - \log\cosh x.$$

1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.

2) Calcolare i limiti significativi e gli eventuali asintoti di f.

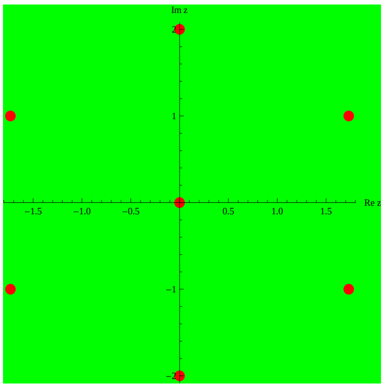


Figura 23: Soluzione esercizio 4 Tema 1.

3) Calcolare f', determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo o minimo relativi o assoluti.

4) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento. Il dominio di f è $\{x \in \mathbb{R} : \sinh x \neq 2\}$. Risolvendo l'equazione

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2$$

si ottiene

$$e^{2x} - 4e^x - 1 = 0,$$

la cui unica soluzione è $\log(2+\sqrt{5})$. Il dominio pertanto è $\{x \in \mathbb{R} : x \neq \log(2+\sqrt{5})\}$.
Il segno di f è positivo, per $x > \log(2+\sqrt{5})$, se e solo se

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} - 2 \geq \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

cioè mai. Per $x < \log(2+\sqrt{5})$ invece il segno è positivo se e solo se

$$2 - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \geq \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

cioè se e solo se $x \leq \log 2$ (che è $< \log(2+\sqrt{5})$).
Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2} - 2}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to+\infty} \log \frac{e^x - e^{-x} - 4}{e^x + e^{-x}} = \log 1 = 0,$$

quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \log \frac{2 - \frac{e^x-e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to-\infty} \log \frac{4 - e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \log 1 = 0,$$

quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Infine si ha

$$\lim_{x\to\log(2+\sqrt{5})} f(x) = -\infty,$$

cioè $x = \log(2+\sqrt{5})$ è asintoto verticale.
La funzione è visibilmente derivabile in tutto il dominio e si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\cosh x}{\sinh x - 2} - \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x + 2\sinh x}{(\sinh x - 2)\cosh x} = \frac{1+2\sinh x}{(\sinh x - 2)\cosh x} & \text{per } x > \log(2+\sqrt{5}) \\ \frac{-\cosh x}{2-\sinh x} - \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{1+2\sinh x}{(\sinh x-2)\cosh x} & \text{per } x < \log 2 + \sqrt{5}). \end{cases}$$

Il segno di f' è visibilmente positivo per $x > \log(2+\sqrt{5})$, mentre per $x < \log(2+\sqrt{5})$ è negativo se e solo se $1 + 2\sinh x < 0$, cioè se e solo se $x > \log(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$. Quindi $x = \log(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$ è un punto di massimo locale stretto. Il grafico è come in figura.

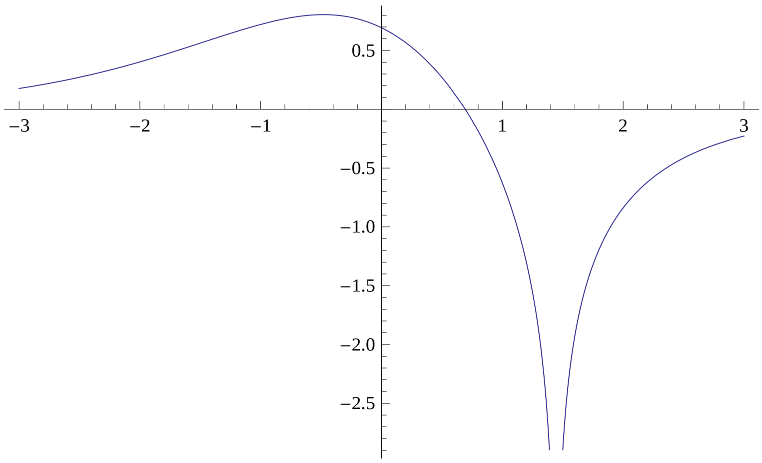


Figura 24: Grafico funzione $f(x) = \log|\sinh x - 2| - \log\cosh x$. .

Esercizio 2
a) Dato il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0, \tag{1}$$

calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2 + \log(n!) + \sin n\right)\left(\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1)\right).$$

b) [FACOLTATIVO] Dimostrare (1).
Svolgimento. Si ha

$$\log(n!) = \log n + \log(n-1) + \ldots + \log 2 = \sum_{k=1}^{n} \log k \leq n\log n.$$

Siccome $\log n = o(n)$ per $n \to \infty$, allora $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0$.
Da (1) e dal fatto che $\sin n$ è limitato, e quindi $\sin n = o(n^2)$ per $n \to \infty$, si ha subito che

$$n^2 + \log(n!) + \sin n \sim n^2 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Si ha inoltre, per $n \to \infty$,

$$\begin{aligned} \sinh\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1) &= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\left(\log n - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{\log n}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

siccome $\log n/n^3 = o(n^3)$. Analogamente, si ha

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1) &= \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\left(\log n+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{\log n}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

per $n \to \infty$. Quindi

$$\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1)-\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1) = -\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

per $n \to \infty$. In sintesi, si ha

$$\begin{aligned}\left(n^2+\log(n!)+\sin n\right)\left(\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1)-\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1)\right) &= \left(n^2+o(n^2)\right)\left(-\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &\to -2 \quad \text{per } n\to\infty.\end{aligned}$$

Esercizio 3
a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty}\frac{3-e^{\alpha x}}{e^{2x}+3}dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) Calcolarlo per $\alpha = 1$.
Svolgimento. a) L'integranda è continua ed ha segno definitivamente costante per $x \to +\infty$), per cui la convergenza può essere studiata mediante il criterio del confronto asintotico. Si ha, per $x \to +\infty$ e $\alpha > 0$,

$$\frac{3-e^{\alpha x}}{e^{2x}+3} \sim \frac{-1}{e^{(2-\alpha)x}}$$

e

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^{(2-\alpha)x}}dx < +\infty$$

se e solo se $\alpha < 2$. Per $\alpha \leq 0$ si ha $\frac{3-e^{\alpha x}-}{e^{2x}+3} \leq \frac{1}{e^{2x}}$. Quindi l'integrale richiesto converge se e solo se $\alpha < 2$.
b) Ponendo $t = \log x$ si ha

$$\int_0^{+\infty}\frac{3-e^x}{e^{2x}+3}dx = \int_1^{+\infty}\frac{3-t}{(t^2+3)t}dt = \int_1^{+\infty}\frac{3-t}{t^3+3t}dt.$$

Utilizzando la scomposizione

$$\frac{3-t}{t^3+3t} = \frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+3} = \frac{1}{t}-\frac{t+1}{t^2+3},$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{3-t}{t^3+3t}dt &= \int_1^{+\infty}\frac{1}{t}-\frac{t+1}{t^2+3}\,dt\\ &= \int_1^{+\infty}\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\frac{2t}{t^2+3}-\frac{1}{t^2+3}\,dt\\ &= \lim_{t\to+\infty}\log\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}+\log 2-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}\\ &= \log 2-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Esercizio 4 Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^3 = -2(1+\sqrt{3}i)\overline{z}$$

esprimendole prima in forma trigonometrica/esponenziale e poi in forma algebrica; disegnarle infine sul piano di Gauss.

Svolgimento. Poniamo $z = \rho e^{i\vartheta}$. Chiaramente $z = 0$ è una soluzione, per cui cerchiamo le soluzioni non nulle. Prendendo il modulo di entrambi i membri dell'equazione si ottiene

$$\rho^3 = 4\rho,$$

da cui $\rho = 2$, cioè $z = 2e^{i\vartheta}$. Quindi

$$2^3 e^{3i\vartheta} = 4e^{4i\pi/3} 2e^{-i\vartheta},$$

da cui

$$e^{4i\vartheta} = e^{4i\pi/3},$$

cioè

$$\vartheta = \pi/3 + k\pi/2, \quad k = 0, \ldots, 3.$$

Quindi le soluzioni non nulle dell'equazione sono

$$2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3},\ 2e^{5i\pi/6} = -\sqrt{3} + i,$$
$$e^{i4\pi/3} = -1 - i\sqrt{3}, e^{i11\pi/6} = \sqrt{3} - i$$

(v. figura).

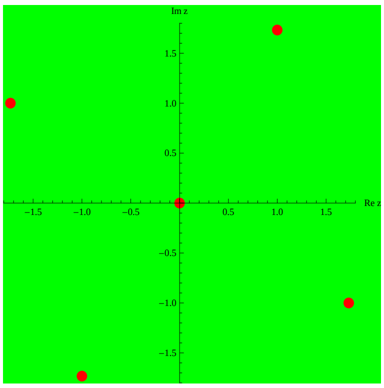


Figura 25: Soluzione esercizio 4 Tema 2.

Appello del 16.09.2013

TEMA 1

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x) = 2x - \sqrt{|x^2 - 4x + 3|},$$

(a) determinarne il segno ed eventuali asintoti;
(b) studiarne la derivabilità e calcolare f';

(c) determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(d) calcolare i limiti significativi di f';
(e) disegnare un grafico qualitativo di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).
Svolgimento. (a) Il dominio di f è banalmente la retta reale. Per studiare il segno di f si deve risolvere la disequazione

$$2x \geq \sqrt{|x^2 - 4x + 3|}.$$

Quest'ultima non può avere soluzioni negative, per cui, elevando al quadrato per $x \geq 0$ si ottiene la disequazione equivalente

$$4x^2 \geq |x^2 - 4x + 3|,$$

che a sua volta equivale a

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4x - 3 \geq 0, \qquad & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \text{ o } x \geq 3 \\ 5x^2 - 4x + 3 \geq 0, \qquad & \text{per } 1 < x < 3. \end{aligned}$$

Perciò $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq (\sqrt{13} - 2)/3$. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x - \sqrt{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 + 4x - 3}{2x + \sqrt{x^2 - 4x + 3}} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x + 3}{x + \sqrt{x^2 - 4x + 3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4 + 3/x}{1 + \sqrt{1 - 4/x + 3/x^2}} = 2,$$

per cui la retta $y = x + 2$ è un asintoto obliquo per f per $x \to +\infty$. Analogamente si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x + 4 - 3/x}{2x - x\sqrt{1 - 4/x + 3/x^2}} = 3$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - 3x = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x + 3}{-x - x\sqrt{1 - 4/x + 3/x^2}} = -2,$$

per cui $y = 3x - 2$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.
(b) f è derivabile se e solo se l'argomento del modulo (e quindi della radice) non è nullo, cioè se e solo se $x \neq 1, 3$. Per $x < 1$ o $x > 3$ si ha

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2 - 4x + 3} - x + 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}},$$

mentre per $1 < x < 3$ si ha

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{-x^2 + 4x - 3} + x - 2}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}}.$$

(c) Il segno di f' è dato dal segno del numeratore. Nel primo caso il segno è banalmente positivo per $x < 1$, mentre elevando al quadrato per $x > 3$, si ottiene che il segno è positivo se e solo se

$$3x^2 - 12x + 8 \geq 0,$$

cioè per $x \geq (6+\sqrt{12})/3$, che pertanto è un punto di minimo locale stretto. Nel secondo caso, il segno è certamente positivo se $2 \leq x < 3$, mentre elevando al quadrato per $1 < x < 2$ si ottiene che il segno è positivo se e solo se

$$5x^2 - 20x + 16 \leq 0,$$

cioè se e solo se $2 \geq x \geq 2(1 - 1/\sqrt{5})$. Quest'ultimo è quindi un punto di minimo relativo stretto.
(d) Si ha

$$\lim_{x\to 1-} f'(x) = +\infty = \lim_{x\to 3-} f'(x),$$

mentre

$$\lim_{x\to 1+} f'(x) = -\infty = \lim_{x\to 3+} f'(x).$$

Quindi $x = 1$ e $x = 3$ sono punti di cuspide e punti di massimo relativo stretto.
(e) Il grafico è come in figura.

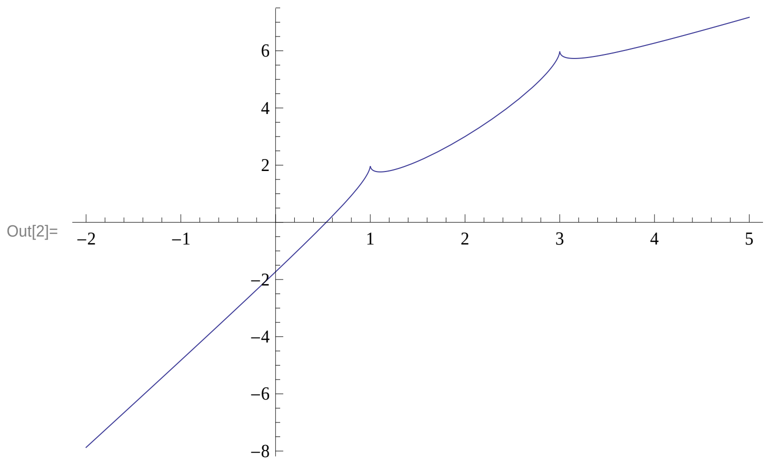


Figura 26: Grafico funzione $f(x) = 2x - \sqrt{|x^2 - 4x + 3|}$.

Esercizio 2 Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(n(e^{\frac{1}{n}} - 1) - \frac{\alpha}{n}\right).$$

Svolgimento. Applichiamo il confronto asintotico. Ricordiamo che

$$e^x = 1 + x + o(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \log(1+x) = x + o(x),$$

per cui

$$a_n := \log\left(n(e^{\frac{1}{n}} - 1) - \frac{\alpha}{n}\right) = \log\left(n\left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) - \frac{\alpha}{n}\right) = \log\left(1 + o(1) - \frac{\alpha}{n}\right) = \log(1 + o(1)),$$

che però non è sufficiente a stabilire il comportamento asintotico. Allunghiamo lo sviluppo dell'esponenziale:

$$a_n = \log\left(n\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right) - \frac{\alpha}{n}\right) = \log\left(1 + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Se $\frac{1}{2}-\alpha \neq 0$ allora $a_n \sim \frac{\frac{1}{2}-\alpha}{n}$ e quindi la serie diverge per confronto asintotico. Se $\alpha = \frac{1}{2}$ ancora non possiamo dire nulla. Allungando ulteriormente lo sviluppo dell'esponenziale

$$a_n = \log\left(n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)-1\right)-\frac{1}{2n}\right) = \log\left(1+\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim \frac{1}{6n^2}.$$

Dunque la serie converge assolutamente per confronto asintotico.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x+3}}$$

Svolgimento. Procediamo per parti: osservato che $\frac{1}{\sqrt{x+3}} = 2\left(\sqrt{x+3}\right)'$ abbiamo

$$\int \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x+3}}\,dx = 2\sqrt{x+3}\log(x-1) - 2\int \sqrt{x+3}\frac{1}{x-1}\,dx.$$

Calcoliamo per sostituzione quest'ultima primitiva ponendo $y=\sqrt{x+3}$, $x=y^2-3$, $dx = 2ydy$ da cui

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+3}}{x-1}\,dx &= \int \frac{y}{y^2-4}2y\,dy = 2\int \frac{y^2}{y^2-4}\,dy = 2\int\left(1+\frac{4}{y^2-4}\right) = 2y+2\int\frac{1}{y-2}-\frac{1}{y+2}\\ &= 2y+2\log\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = 2\sqrt{x+3}+2\log\left|\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+3}+2}\right|.\end{aligned}$$

Da cui

$$\int \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x+3}}\,dx = 2\sqrt{x+3}\log(x-1) - 4\sqrt{x+3} - 4\log\left|\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+3}+2}\right| + c, c\in\mathbb{R}.$$

In alternativa si può operare subito la sostituzione $x+3=y^2$, che dà

$$\begin{aligned}\int \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x+3}}dx &= 2\int \log(y^2-4)\,dy = 2y\log(y^2-4) - 4\int\frac{y^2}{y^2-4}dy\\ &= 2y\log(y^2-4) - 4y - 16\int\frac{1}{y^2-4}dy\\ &= 2y\log(y^2-4)-4y-4\log\left|\frac{y-2}{y+2}\right| + c, c\in\mathbb{R}\\ &= 2\sqrt{x+3}\log(x-1)-4\sqrt{x+3}-4\log\left|\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+3}+2}\right| + c, c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Esercizio 4 Rappresentare le soluzioni della disequazione

$$\left| |z-1|^2 - \left|\frac{z-\overline{z}}{2}\right|^2 - 1\right| \geq \mathrm{Im}z - 3$$

nel piano complesso.

Svolgimento. Poniamo $z = x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$. La disequazione diventa allora

$$\left|(x-1)^2+y^2-\left|\frac{2iy}{2}\right|^2-1\right| \geq y-3,$$

cioè

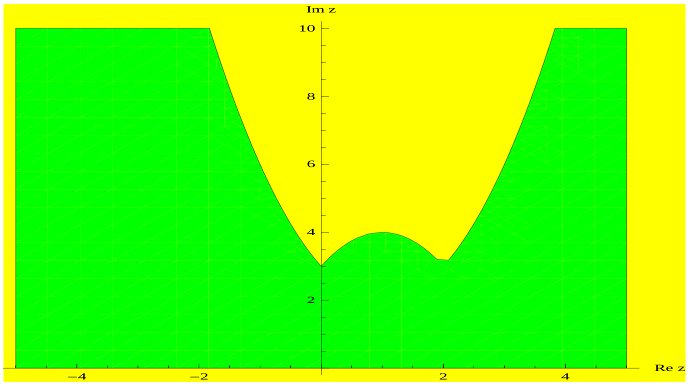
$$\left|x^2 - 2x\right| \geq y - 3.$$

Posto

$$g(x) = \left|x^2 - 2x\right| = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{per } x < 0 \text{ o per } x > 2 \\ 2x - x^2 \text{ per } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

l'insieme delle soluzioni della disequazione è costituito dai punti (x, y) del piano tali che $y \leq g(x) + 3$ (v. figura, la soluzione è in verde).

Out[57]=



TEMA 2

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x) = 2x - \sqrt{|x^2 - 5x + 6|},$$

(a) determinarne il segno ed eventuali asintoti;
(b) studiarne la derivabilità e calcolare f';
(c) determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(d) calcolare i limiti significativi di f';
(e) disegnare un grafico qualitativo di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento. (a) Il dominio di f è banalmente la retta reale. Per studiare il segno di f si deve risolvere la disequazione

$$2x \geq \sqrt{|x^2 - 5x + 6|}.$$

Quest'ultima non può avere soluzioni negative, per cui, elevando al quadrato per $x \geq 0$ si ottiene la disequazione equivalente

$$4x^2 \geq |x^2 - 5x + 6|,$$

che a sua volta equivale a

$$\begin{aligned} &3x^2 + 5x - 6 \geq 0, \qquad && \text{per } 0 \leq x \leq 2 \text{ o } x \geq 3 \\ &5x^2 - 5x + 6 \geq 0, \qquad && \text{per } 2 < x < 3. \end{aligned}$$

Perciò $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq (\sqrt{97} - 5)/6$. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x - \sqrt{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 + 5x - 6}{2x + \sqrt{x^2 - 5x + 6}} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-6}{x+\sqrt{x^2-5x+6}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-6/x}{1+\sqrt{1-5/x+6/x^2}}=\frac{5}{2},$$

per cui la retta $y=x+5/2$ è un asintoto obliquo per f per $x\to+\infty$. Analogamente si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+5-6/x}{2x-x\sqrt{1-5/x+6/x^2}}=3$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-3x=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-6}{-x-x\sqrt{1-5/x+6/x^2}}=-\frac{5}{2},$$

per cui $y=3x-5/2$ è asintoto obliquo per $x\to-\infty$.
(b) f è derivabile se e solo se l'argomento del modulo (e quindi della radice) non è nullo, cioè se e solo se $x\neq 2,3$. Per $x<2$ o $x>3$ si ha

$$f'(x)=\frac{4\sqrt{x^2-5x+6}-2x+5}{\sqrt{x^2-5x+6}},$$

mentre per $1<x<3$ si ha

$$f'(x)=\frac{4\sqrt{-x^2+5x-6}+2x-5}{\sqrt{-x^2+5x-6}}.$$

(c) Il segno di f' è dato dal segno del numeratore. Nel primo caso il segno è banalmente positivo per $x<2$, mentre elevando al quadrato per $x>3$, si ottiene che il segno è positivo se e solo se

$$12x^2-60x+71\geq 0,$$

cioè per $x\geq(15+2\sqrt{3})/6$, che pertanto è un punto di minimo locale stretto. Nel secondo caso, il segno è certamente positivo se $5/2\leq x<3$, mentre elevando al quadrato per $2<x<5/2$ si ottiene che il segno è positivo se e solo se

$$20x^2-100x+121\leq 0,$$

cioè se e solo se $x\geq(25-2\sqrt{5})/10$ (>2). Quest'ultimo è quindi un punto di minimo relativo stretto.
(d) Si ha

$$\lim_{x\to2-} f'(x)=+\infty=\lim_{x\to3-} f'(x),$$

mentre

$$\lim_{x\to2+} f'(x)=-\infty=\lim_{x\to3+} f'(x).$$

Quindi $x=2$ e $x=3$ sono punti di cuspide e punti di massimo relativo stretto.
(e) Il grafico è come in figura.

Esercizio 2 Discutere, al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(n\left(\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-1\right)-\frac{\alpha}{n}\right).$$

Svolgimento. Applichiamo il confronto asintotico. Ricordiamo che

$$\cosh x=1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}+o(x^6),\quad \log(1+x)=x+o(x),$$

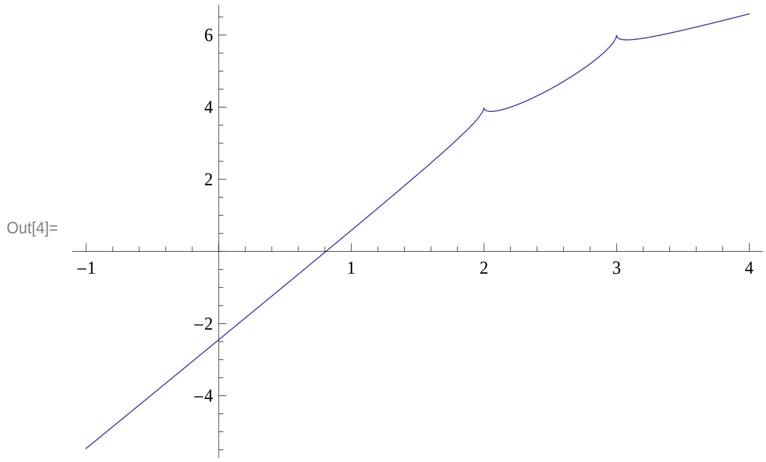


Figura 27: Grafico funzione $f(x) = 2x - \sqrt{|x^2 - 5x + 6|}$.

per cui

$$a_n \quad := \log\left(n\left(\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1\right) - \frac{\alpha}{n}\right) = \log\left(n\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) - \frac{\alpha}{n}\right) = \log\left(\frac{1}{2} + o(1) - \frac{\alpha}{n}\right)$$

$$= \log(\tfrac{1}{2} + o(1)).$$

Quindi il termine generale non è infinitesimo per $n \to \infty$: la serie diverge per ogni α.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x-3}}\, dx.$$

Svolgimento. Procediamo per parti: osservato che $\frac{1}{\sqrt{x-3}} = 2\left(\sqrt{x-3}\right)'$ abbiamo

$$\int \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x-3}}\, dx = 2\sqrt{x-3}\log(x+1) - 2\int \sqrt{x-3}\frac{1}{x+1}\, dx.$$

Calcoliamo per sostituzione quest'ultima primitiva ponendo $y = \sqrt{x-3}$, $x = y^2 + 3$, $dx = 2ydy$ da cui

$$\int \frac{\sqrt{x-3}}{x+1}\, dx \quad = \int \frac{y}{y^2+4} 2y\, dy = 2\int \frac{y^2}{y^2+4}\, dy = 2\int \left(1 + \frac{4}{y^2+4}\right) = 2y + 2\int \frac{1}{1+(y/2)^2}$$

$$= 2y + 4\arctan\frac{y}{2} = 2\sqrt{x-3} + 4\arctan\frac{\sqrt{x-3}}{2}.$$

Da cui

$$\int \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x-3}}\, dx = 2\sqrt{x-3}\log(x+1) - 4\sqrt{x-3} + 8\arctan\frac{\sqrt{x-3}}{2}.$$

Esercizio 4 Rappresentare le soluzioni della disequazione

$$\left||z-1|^2 - \left|\frac{z-\overline{z}}{2}\right|^2 - 1\right| \leq \mathrm{Im} z + 4$$

nel piano complesso.
Svolgimento. Poniamo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. La disequazione diventa allora

$$\left|(x-1)^2 + y^2 - \left|\frac{2iy}{2}\right|^2 - 1\right| \leq y + 4,$$

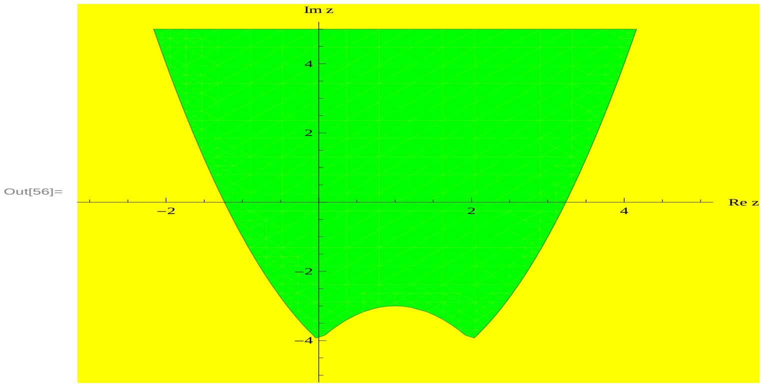
cioè

$$\left|x^2 - 2x\right| \leq y + 4.$$

Posto

$$g(x) = \left|x^2 - 2x\right| = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{per } x < 0 \text{ o per } x > 2 \\ 2x - x^2 \text{ per } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

l'insieme delle soluzioni della disequazione è costituito dai punti (x, y) del piano tali che $y \geq g(x) - 4$ (v. figura, la soluzione è in verde).



2.3 Ulteriori esercizi (a cura di C. Sartori)

FUNZIONI

Esercizio. Determinare, al variare di $\lambda > 1$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$\lambda^x = x^\lambda.$$

Soluzione. L'equazione (che ha la soluzione λ) è equivalente a

$$x \log \lambda = \lambda \log x.$$

Posto $f(x) = x \log \lambda$, $g(x) = \lambda \log x$, si ha $f'(x) = \log \lambda$, $g'(x) = \frac{\lambda}{x}$ e quindi le due funzioni sono tangenti se

$$\begin{cases} x \log \lambda = \lambda \log x \\ \log \lambda = \frac{\lambda}{x}. \end{cases}$$

Si ricava $\lambda = \lambda \log x$ cioè $x = e$ e quindi $\log \lambda = \frac{\lambda}{e}$ da cui $\lambda = e$. La funzione $\log x$ è tangente alla retta $y = \frac{\log \lambda}{\lambda} x$ se $\lambda = e$. Il coefficiente angolare della retta ha un massimo per $\lambda = e$ e quindi confrontando il grafico di $\log x$ con quello della retta $y = \frac{\log \lambda}{\lambda} x$ si ottengono sempre due soluzioni $\forall \lambda > 1$. Per $\lambda = e$ si ha una sola soluzione.

Esercizio Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = 3x^4 + 4(2a - a^2)x^3 - 12a^3x^2 + a^6,$$

dove $a > 0$ è un parametro fissato. Determinare
a) i punti di massimo e minimo di f e i valori di f in tali punti;
$x = -2a, a^2$ punti di minimo; $x = 0$ punto di massimo; $f(-2a) = -16a^4 - 16a^5 + a^6$, $f(a^2) = -a^8 - 4a^7 + a^6$ $f(0) = a^6$.

b) i valori di a per cui l'equazione $f = 0$ ha 2 zeri positivi;
Basta imporre $f(a^2) < 0$ che implica $a > -2 + \sqrt{5}$;

c) i valori di a per cui l'equazione $f = 0$ ha non piu' di uno zero negativo;
Basta imporre $f(-2a) \geq 0$ che implica $a \geq 8 + \sqrt{80}$.

d) i valori di $a \geq 0$ per cui f è convessa.
$a = 0$

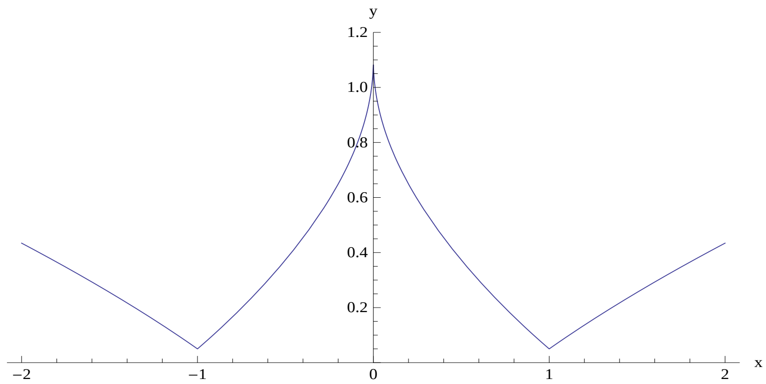
Esercizio. Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{10(1 + x^2)} + \left|1 - \sqrt{|x|}\right| = \lambda.$$

Soluzione. Studio la funzione $f(x) = \frac{1}{10(1+x^2)} + \left|1 - \sqrt{|x|}\right|$ è pari e quindi basta studiarla per $x \geq 0$. Si ha $f(0) = \frac{11}{10}$, $\lim_{x \to +\infty} = +\infty$ e

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2x}{10(1+x^2)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x < 1 \\ \frac{-2x}{10(1+x^2)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x > 1. \end{cases}$$

f è decrescente in $(0, 1)$ e crescente in $(1, +\infty$, quindi $x = 0$ è punto di massimo relativo e $x = 1$ è punto di minimo assoluto. Il grafico è



porta alle soluzioni

$$\begin{cases} \lambda < \frac{1}{20} & \text{nessuna soluzione} \\ \lambda = \frac{1}{20} & \text{2 soluzioni} \\ \frac{1}{20} < \lambda < \frac{11}{10} & \text{4 soluzioni} \\ \lambda = \frac{11}{10} & \text{3 soluzioni} \\ \lambda > \frac{11}{10} & \text{2 soluzioni.} \end{cases}$$

Esercizio Data la funzione

$$f(x) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x - 1,$$

determinare per quali valori di $a > 0$

a) $f(x)$ ha esattamente tre zeri;

b) tali zeri sono tutti positivi.

Soluzione.

a)
$$f'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2 = 0 \iff x = \frac{a}{2},\ x = \frac{a}{6}.$$

$x = \frac{a}{2}$ è punto di massimo e $x = \frac{a}{6}$ è punto di minimo. Per avere tre zeri si deve imporre $f(\frac{a}{2}) < 0 < f(\frac{a}{6})$ che è verificato se e solo se $a > \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

b) Poichè $f(0) = -1 < 0$ per $0 < x < \frac{a}{6}$ c'è uno zero, cosi' come ce ne è uno in $(\frac{a}{6}, \frac{a}{2}$ e infine un terzo per $x > \frac{a}{2}$ dato che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Esercizio. Data la funzione

$$f_a(x) = x^a - ax^2, \quad a > 0,$$

calcolare $\sup\{f_a(x),\, x \geq 0\}$ e $\inf\{f_a(x),\, x \geq 0\}$, specificando se sono massimo o minimo.

Soluzione.

$$a > 2 \ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty = \sup\{f_a(x),\, x \geq 0\};$$

$$a \leq 2 \ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty} f_a(x) = -\infty = \inf\{f_a(x),\, x \geq 0\}.$$

Si ha $f_a'(x) = ax^{a-1} - 2ax = 0 \iff x = 0,\ 2^{\frac{1}{a-2}}$ se $a \neq 2$. $2^{\frac{1}{a-2}}$ è di minimo se $a > 2$, di massimo se $a < 2$. Quindi

$$a > 2 \ \Rightarrow\ \min\{f_a(x),\, x \geq 0\} = 2^{\frac{a}{a-2}} - a2^{\frac{2}{a-2}};$$

$$a < 2 \ \Rightarrow\ \max\{f_a(x),\, x \geq 0\} = 2^{\frac{a}{a-2}} - a2^{\frac{2}{a-2}};$$

$$a = 2 \ \Rightarrow\ \max\{f_2(x),\, x \geq 0\} = 0.$$

Esercizio. Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$-\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^4|x - 1| = \lambda.$$

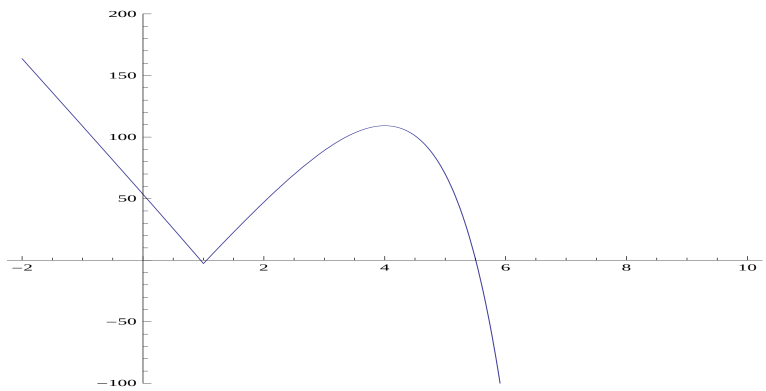
Sol. Studio la funzione

$$f(x) = -\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^4|x - 1|.$$

$\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

$$f'(x) = \begin{cases} -\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^4, & \text{per } x > 1 \\ -\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^4, & \text{per } x < 1. \end{cases}$$

C'è un punto di max in $(4, 2\mathrm{e}^4)$ e un punto di min. (angoloso) in $(1, -\mathrm{e})$.



Quindi

$$\begin{cases} \lambda > 2\mathrm{e}^4,\ \lambda < -\mathrm{e} \quad 1 \text{ sol.}, \\ -\mathrm{e} < \lambda < 2\mathrm{e}^4 \quad 3 \text{ sol.}, \\ \lambda = -\mathrm{e}, 2\mathrm{e}^4 \quad 2 \text{ sol.}. \end{cases}$$

Esercizio. Sia

$$f(x) = \ln(x+4) + \frac{x+8}{x+4}.$$

- Calcolare gli intervalli di concavità e di convessità di f sul suo dominio naturale.
- Individuare il massimo intervallo A contenente -3 dove f risulti invertibile.
- Sia g la funzione inversa della f ristretta su A. Calcolare $g'(f(-3))$.

SOL. Dom$f = \{x > -4\}$. $f'(x) = x/(4+x)^2$, $f''(x) = (4-x)/(4+x)^3$. Si ha $f''(x) > 0$ per $-4 < x < 4$ e ivi la funzione è convessa, per $x > 4$ concava. Il max intorno di -3 in cui f è monotona (decrescente) e quindi invertibile è $-4 < x < 0$. Si ha $f(-3) = 5$, e

$$g'(f(-3)) = \frac{1}{f'(-3)} = -\frac{1}{3}.$$

FUNZIONI INTEGRALI

Esercizio. Studiare la convessità e concavità della funzione

$$F(x) = \int_2^x g(\sin t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

dove g è una funzione derivabile in $\mathbb{R}$ e tale che $g'(x) < 0$.

Soluzione Si ha

$$F'(x) = g(\sin x),\ \text{ e } F''(x) = g'(\sin x)\cos x,$$

da cui

$$F''(x) > 0 \iff \cos x < 0 \iff \frac{\pi}{2} + 2K\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$$

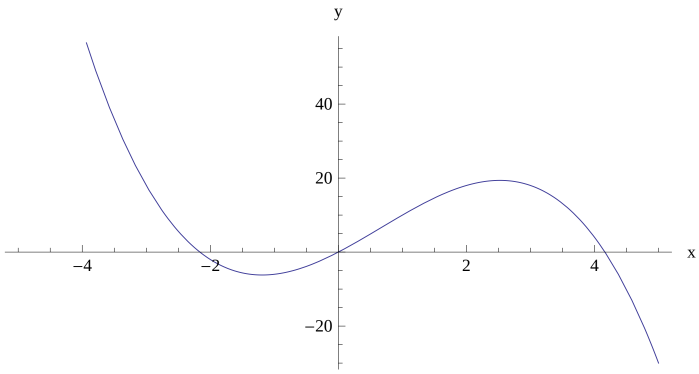
per K intero; nell'unione di tali intervalli F è convessa, e nel complementare è concava.

Esercizio. Studiare la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{(t+1)(3-t)}{\arctan(1+t^2)}\, dt,$$

specificando, in particolare, gli intervalli di crescenza e decrescenza. Calcolare $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} F(x)$ e tracciare un grafico qualitativo.

Soluzione. Si ha $F'(x) = \frac{(x+1)(3-x)}{\arctan(1+x^2)}$ e $F'(x) > 0 \iff -1 < x < 3$. $\lim_{x\to+\infty} F'(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} F'(x) = -\infty$, da cui si ricava $F'(x) < -1$ per $|x| > M$ e quindi $\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$.



Esercizio. Determinare per $-\frac{1}{2} \le x \le 1$,

$$F(x) = \int_0^x [2t]\, dt$$

dove $[x]$ indica la funzione parte intera di x.

Soluzione.
Si ha

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x 0\, dt = 0 \quad \text{per}\, 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \int_0^{\frac{1}{2}} 0 + \int_{\frac{1}{2}}^x 1\, dt = x - \frac{1}{2}, \quad \text{per} \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ \int_0^x -1\, dt = -x, \quad \text{per} - \frac{1}{2} \le x \le 0. \end{cases}$$

Esercizio. Determinare se

$$F(x) = x - \int_0^x \frac{|\cos t|}{t^2+1}\, dt$$

ha un asintoto per $x \to +\infty$ e, in caso affermativo, calcolarne il coefficients angolare.
Soluzione. Si ha $F(x) \to -\infty$ per $x \to +\infty$, Inoltre usando la regola di De L'Hospital si ha $\lim_x \to +\infty \frac{F(x)}{x} = 1$. Si deve dimostrare che $\lim_{x\to+\infty} F(x) + x \ne \pm\infty$. Si ha per $x > 0$

$$0 \le \int_0^x \frac{|\cos t|}{t^2+1}\, dt = F(x) + x \le \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\, dt < \pi/2.$$

LIMITI

Esercizio Calcolare i seguenti limiti (il terzo al variare di $\alpha \in \mathbb{Q}$),

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^6 - 3^6}{x^8 - 3^8} = 1/12, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{n!} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^\alpha+x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+x^2}. = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^\alpha+x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha<2/3 \\ 1 & \text{se } \alpha=2/3 \\ 0 & \text{se } \alpha>2/3 \end{cases}$$

2) a) Determinare un polinomio $P(x)$ di grado al più due tale che

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x)^2-P(x)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}=0.$$

b) Calcolare, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right)$$

dove $a>b>0$ sono due numeri fissati.

c) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}}\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{\sqrt[5]{k}}.$$

Sol. a) Per la formula di Taylor si ha, detta $f(x)=(\sin x)^2$

$$P(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

$$f'(x)=2\sin x\cos x\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=0,$$

$$f''(x)=2(\cos x)^2-2(\sin x)^2\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=-2.$$

Da cui

$$P(x)=1-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

b) $$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}=e^{\frac{1}{n}\log a}-e^{\frac{1}{n}\log b}=(\log a-\log b)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right)=\begin{cases} +\infty & \text{per } \alpha>1 \\ \log a-\log b & \text{per } \alpha=1 \\ 0 & \text{per } \alpha<1. \end{cases}$$

c) $$\int_2^{n+1}\frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\,dx\le\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k^{\frac{1}{5}}}\le\int_1^n\frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\,dx$$

da cui

$$\frac{5}{4}\left((n+1)^{\frac{4}{5}}-2^{\frac{4}{5}}\right)\le\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k^{\frac{1}{5}}}\le\frac{5}{4}\left(n^{\frac{4}{5}}-1\right)$$

da cui per confronto si ricava subito che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4}} \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{\sqrt[5]{k}} = \frac{5}{4}.$$

Esercizio. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = 3x^4 + 4(2a - a^2)x^3 - 12a^3x^2 + a^6,$$

dove $a > 0$ è un parametro fissato. Determinare
a) i punti di massimo e minimo di f e i valori di f in tali punti;
$x = -2a, a^2$ punti di minimo; $x = 0$ punto di massimo; $f(-2a) = -16a^4 - 16a^5 + a^6$, $f(a^2) = -a^8 - 4a^7 + a^6$ $f(0) = a^6$.

b) i valori di a per cui l'equazione $f = 0$ ha 2 zeri positivi;
Basta imporre $f(a^2) < 0$ che implica $a > -2 + \sqrt{5}$;

c) i valori di a per cui l'equazione $f = 0$ ha non piu' di uno zero negativo;
Basta imporre $f(-2a) \geq 0$ che implica $a \geq 8 + \sqrt{80}$.

d) i valori di $a \geq 0$ per cui f è convessa.
$a = 0$

2) Calcolare i seguenti limiti (il terzo al variare di $\alpha \in \mathbb{Q}$),

$$\lim_{x\to3} \frac{x^6 - 3^6}{x^8 - 3^8} = 1/12, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{n!} = 1,$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x^\alpha + x} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + x^2} \qquad \left(= \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x^\alpha + x} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 2/3 \\ 1 & \text{se } \alpha = 2/3 \\ 0 & \text{se } \alpha > 2/3 \end{cases} \right)$$

Esercizio Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\arctan\left(\frac{x^2}{4}\right)}{e^{\sin x} - \cos(\sqrt{x}) - \frac{3}{2}x}.$$

SOL.

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\arctan\left(\frac{x^2}{4}\right)}{e^{\sin x} - \cos(\sqrt{x}) - \frac{3}{2}x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{x^2}{4} + o(x^2)}{1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + o(\sin^2 x) - \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} + o(x^2)\right) - \frac{3}{2}x} =$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{x^2}{4} + o(x^2)}{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} + o(x^2)\right) - \frac{3}{2}x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{x^2}{4} + o(x^2)}{\frac{11}{24}x^2 + o(x^2)} = \frac{6}{11}.$$