Lezione 10

venerdì 25 ottobre 2013
10:15

Esercizio: Al variare di $\alpha > 0$, calcolare il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^\alpha} \qquad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Soluzione:

$$0 \leq \frac{\log(n!)}{n^\alpha} = \frac{\log(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n)}{n^\alpha} = \frac{\overset{1}{\log 1} + \overset{2}{\log 2} + \ldots + \overset{n}{\log n}}{n^\alpha} \leq$$

$$\leq \frac{n\cdot \log n}{n^\alpha} = \frac{\log n}{n^{\alpha-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Se $\alpha - 1 > 0$ allora $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{\alpha-1}} = 0$

Prima conclusione: Per confronto concludo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^\alpha} = 0 \qquad \text{se } \alpha > 1.$$

Studio il caso $\alpha = 1$:

supponiamo n pari

$$\frac{\log(n!)}{n} = \frac{\overset{1}{\log 1} + \ldots + \overset{n}{\log n}}{n} =$$

$$= \frac{\left(\overset{1}{\log 1} + \ldots + \overset{n/2}{\log \frac{n}{2}}\right) + \left(\overset{1}{\log\left(\frac{n}{2}+1\right)} + \ldots + \overset{n/2}{\log n}\right)}{n} \geq$$

$$\geq \frac{\log\left(\frac{n}{2}+1\right) + \ldots + \log(n)}{n} \geq \frac{\log\left(\frac{n}{2}+1\right)\cdot \frac{n}{2}}{n} =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{n}{2}+1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$$= \frac{1}{2} \log\left(\frac{n}{2}+1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Per confronto:
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n} = +\infty}$$

Se poi $0<\alpha<1$ allora $n^{\alpha} < n \Rightarrow \boxed{\frac{1}{n} < \frac{1}{n^{\alpha}}}$

$$\frac{\log(n!)}{n^{\alpha}} > \frac{\log(n!)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

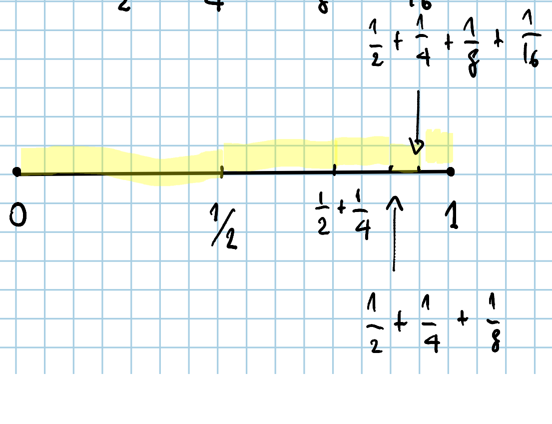
Per confronto
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^{\alpha}} = +\infty \qquad \forall\, 0<\alpha\leq 1 .$$

$\square$

Serie numeriche

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali.
Vorremmo definire la somma di tutti questi infiniti numeri
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$$

Esempio grafico Voglio determinare la somma infinita
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$



Data $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formiamo la successione delle somme parziali:

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \qquad n \in \mathbb{N}$$

$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si chiama succ. delle somme parziali.

Def (Serie convergente) Se $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un limite finito $s = \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$ allora scriveremo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R},$$

diremo poi che la serie converge e diremo che s è la somma della serie.

Se invece $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ allora scriveremo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty$$

e diremo che la serie diverge a $\pm\infty$.

Oss Esistono serie che né convergono né divergono a $\pm\infty$. Ad esempio

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n}_{\text{non è definito}} \neq 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots \dots ???$$

$$\underbrace{1 + (-1)}_{0} + 1 \qquad \underbrace{}_{1} \qquad \underbrace{}_{0}$$

Linguaggio Data

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

il numero a_n si chiama termine generale della serie.

il numero a_n si chiama termine generale della serie.

Proposizione (Condizione necessaria di convergenza)
Se la serie seguente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

converge ad una somma finita allora:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

(allora il termine generale è infinitesimo).

Dim. Sia $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la succ. delle somme parziali.
Per ipotesi esiste $S \in \mathbb{R}$ limite di

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n . \quad \left(\Rightarrow S = \lim_{n \to \infty} S_{n+1} \right)$$

Allora

$$\lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \left(S_{n+1} - S_n \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} S_{n+1} - \lim_{n \to \infty} S_n$$

$$= S - S = 0$$

$\square$

Esempio 1 La serie seguente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$ NON converge.

Prova:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0 .$$

Non è verificata la cond. necessaria di convergenza.

Esempio 2 Osserviamo la serie (detta armonica)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Il termine generale è $a_n = \frac{1}{n}$.

La CN di convergenza è verificata

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Tuttavia la serie diverge:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Dimostrazione:

$$1 + \frac{1}{2} + \overbrace{\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\ge \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}}}^{1/2} + \overbrace{\underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\ge \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1/2}}^{1/2} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\ge \frac{8}{16} = \frac{1}{2}} + \dots = \infty.$$

Esempio 3 (Serie geometrica). Sia $-1 < q < 1$ la ragione della serie geometrica:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \forall q \in (-1,1)$$

Converge!

Somme parziali: $n+1$

Somme parziali:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Prova: $(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^n = 1-q^{n+1}$.

Siccome $|q|<1$ allora $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$.

Dunque

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Ad esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

<u>Esempio 4</u> (Serie telescopica)

Voglio calcolare la somma esatta della serie

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\right) \quad k+1 = h$$

$h = k+1$

$k=1 \to h=2$

$k=n \to h=n+1$

$$= \lim \left(\sum^{n} \frac{1}{\ } \; (-) \sum^{n+1} \frac{1}{\ } \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Conclusione: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ converge.

<u>Esempio 5</u> Affermo che la serie seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{converge.}$$

Infatti

$$\frac{1}{n^2} \overset{n \geq 2}{\leq} \frac{1}{n(n-1)}$$

$$n \geq n-1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n-1}$$

Dunque

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Fine Dim.

<u>Esempio 6</u> Affermo che $\forall \alpha \geq 2$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \text{converge.}$$

Dim.

$$n^{\alpha} \geq n^2 \quad \text{se} \quad \alpha \geq 2$$

dunque

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha}} \leq \sum^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty .$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{n=1} \frac{1}{n^2} < \infty .$$

Esempio 7 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty$ converge anche $\forall\, 1 < \alpha < 2$. Prova ancora

Esempio 8 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \infty$ diverge per $0 < \alpha \leq 1$

Infatti per $0 < \alpha < 1$

$$n^\alpha \leq n \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \quad \forall n$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

diverge.

Conclusione: Serie armonica generalizzata:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \\ \infty \text{ (diverge) se } \alpha \leq 1 \end{cases}}$$