Lezione 11

mercoledì 30 ottobre 2013
14:21

Criterio della Radice e del Rapporto per serie $\sum a_n$ con $a_n \geq 0$.

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione con $a_n \geq 0$ $\forall n$.
Forma la succ. delle somme parziali:

$$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n \qquad n \in \mathbb{N}$$

La successione $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente.
Quindi ci sono due casi:

1° Caso $\lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \in \mathbb{R} \quad (\geq 0)$

2° Caso $\lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

Teorema (del Confronto) Siano $0 \leq a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Allora:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty \implies \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$.

Dim. Ovvia. Si basa sul fatto che

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n \leq b_0 + b_1 + \ldots + b_n \qquad \forall n.$$

Teorema (Criterio della Radice) Consideriamo la serie

∞

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \text{con} \qquad a_n \geq 0 .$$

Supponiamo che esista il seguente limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \qquad (\text{numero reale} \geq 0 \text{ opp. } L = \infty).$$

Allora :

Caso 1. Se $L < 1$ allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ Converge.

Caso 2. Se $L > 1$ allora $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ e quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ diverge.

Se $L = 1$ la serie può sia convergere che divergere.

Dim.

(1) Per ipotesi $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$.

Dunque esiste $L < q < 1$ ed esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ avremo

$$\sqrt[n]{a_n} < q \implies a_n < q^n \quad \forall n \geq \bar{n}$$

Per confronto deduco che :

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} < \infty$$

uso $\underline{q < 1}$.

La serie data converge per confronto.

(2) Se $L > 1$ allora $\exists\, 1 < q < L$ $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq \bar{n}$:

$$\sqrt[n]{a_n} > q \implies a_n > q^n \quad \forall n \geq \bar{n}$$

Ma allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} q^n = \infty$$

perché $q > 1$

Dunque la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ diverge in quanto il termine generale non è infinitesimo. $\square$

<u>Teorema (Criterio del Rapporto)</u> Consideriamo una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{con} \quad a_n > 0 .$$

Supponiamo che esista il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} .$$

Allora:

1° caso Se $L < 1$ allora la serie converge $\sum a_n < \infty$

2° caso Se $L > 1$ allora $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ e quindi la serie diverge, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$.

Se $L = 1$ il criterio non dà informazioni.

Dim.

(1) Se $L < 1$ esiste $L < q < 1$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \iff a_{n+1} < q \cdot a_n$$

Itero la disuguaglianza e trovo:

Itero la disuguaglianza e trovo:

$$a_n < q\,\boxed{a_{n-1}} < q^2 \cdot \boxed{a_{n-2}} < \ldots < \boxed{q^{n-\bar n}\, a_{\bar n}}$$

$$a_{n-1} < q\, a_{n-2} \qquad a_{n-2} < q \cdot a_{n-3}$$

$$q^{n-\bar n}\, a_{\bar n} = q^n \cdot \boxed{\frac{a_{\bar n}}{q^{\bar n}}}$$

Per confronto

$$\sum_{n=\bar n}^{\infty} a_n \leq \frac{a_{\bar n}}{q^{\bar n}} \sum_{n=\bar n}^{\infty} q^n < \infty$$

perché $q<1$

La serie data converge.

(2) $L>1$. Ripeto l'argomento sopra e trovo

$$a_n > q^n \cdot \frac{a_{\bar n}}{q^{\bar n}} \quad \forall n \geq \bar n \quad \text{dove } 1<q<L$$

Deduco che

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \frac{a_{\bar n}}{q^{\bar n}} \cdot q^n = \infty$$

$q^n \to \infty$, $q>1$

$\square$

Esercizio 1 Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n-1}}$.

Conti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3^{2n}} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3^2)^n} =$$

$$= 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n = 3\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n - 1\right)$$

$$= 3\left(\frac{1}{1-1/9} - 1\right) = 3\left(\frac{9}{9-1} - 1\right)$$

$$= 3\left(\frac{9}{8} - 1\right) = 3\,\frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

$\square$

Esercizio 2 Stabilire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{\sqrt{1+n^3}} .$$

Soluzione. Serie a termini positivi $\frac{1+\cos n}{\sqrt{1+n^3}} \geq 0$.

Test della Cond. Necessaria

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\cos n}{\sqrt{1+n^3}} = 0 .$$

Conti

$$\frac{1+\cos n}{\sqrt{1+n^3}} = \frac{1+\cos n}{n^{3/2}\underbrace{\sqrt{1+1/n^3}}_{\geq 1}} \overset{\text{si}}{\leq} \frac{2}{n^{3/2}}$$

$$\sqrt{1+1/n^3} \geq 1 \implies \frac{1}{\sqrt{1+1/n^3}} \leq 1$$

Per confronto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{\sqrt{1+n^3}} \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty .$$

perché $\frac{3}{2} > 1$

Converge! $\square$

ES 3 Scrivere il numero decimale periodico

$$x = 0,454545\ldots = 0,\overline{45}$$

in forma razionale $x = p/q$ con $p, q \in \mathbb{N}$

Soluzione:

$$x = \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{5}{10^4} + \ldots$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{4}{100^3} + \frac{5}{10^4} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{10^{2n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10^{2n}}$$

$$= \frac{4}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{10^{2n}}}_{= \left(\frac{1}{100}\right)^n} + 5 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n}_{\text{"}}$$

$$= \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} + 5 \cdot \left(\frac{1}{1 - 1/100} - 1 \right)$$

$$= \frac{4}{10} \cdot \frac{100}{100 - 1} + 5 \cdot \left(\frac{100}{99} - 1 \right)$$

$$= 4 \, \frac{10}{99} + 5 \, \frac{1}{99}$$

$$= \frac{1}{99} \left(40 + 5 \right) = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}. \quad \square$$

ES. 4 Dire se converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Soluzione. Ho serie a termini positivi $a_n = \frac{1}{n!} > 0$

Posso usare il Criterio del Rapporto

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\underbrace{(n+1)!}_{= (n+1) \cdot n!}} \cdot n! = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$$\ldots = (n+1)\cdot n!$$

Dunque: Criterio Rapporto

$$L = 0 < 1 \implies \text{La serie } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < \infty$$

converge

Es. 5 Determinare tutte le $x \in \mathbb{R}$ tali che converga la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2+n)}{n} |x|^n .$$

Soluzione. Osservo che $a_n = \frac{\log(2+n)}{n} |x|^n \geq 0$

Posso usare il criterio della Radice:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\log(2+n)}{n} |x|^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} |x| \frac{\sqrt[n]{\log(2+n)}}{\sqrt[n]{n}}$$

Conti:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \text{Fatto noto.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log(2+n)} = 1 \quad \text{e ora lo provo per Confronto:}$$

$$\sqrt[n]{\log 2} \leq \sqrt[n]{\log(2+n)} \leq \sqrt[n]{1+n} \leq \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}$$

$\sqrt[n]{\log 2} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ $\qquad$ $\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

$\log(1+n) \leq n$

$\log(1+1+n) \leq 1+n$

Conclusioni:

$$L(x) = \lim \ldots |x| \left(\frac{\sqrt[n]{\log(2+n)}}{\ldots} \right) = |x|$$

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} |x| \left(\frac{\sqrt[n]{\log(2+n)}}{\sqrt[n]{n}}\right) = |x|$$

Per il Criterio Radice:

(1) $L(x) = |x| < 1 \implies$ Serie Converge

$$\Updownarrow$$

$$-1 < x < 1$$

(2) $L(x) = |x| > 1 \implies$ Serie diverge

$$\Updownarrow$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

Devo ora studiare il caso $L(x) = |x| = 1$ $(x = \pm 1)$.

Ricopio la serie per $|x| = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2+n)}{n} \overset{\text{Confronto}}{\geq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log 2}{n} = \log 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Conclusione: $|x| = 1 \implies$ Serie diverge.

In generale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2+n)}{n} |x|^n \text{ conv.} \iff -1 < x < 1$$

Es. 6 Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che converga la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}}{n^\alpha}.$$

Soluzione. $\sqrt{n^3+1} \geq \sqrt{n^3-1} \Rightarrow$ Serie a termini positivi.

Esamino il termine generale:

$$a_n = \frac{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}}{n^\alpha} \cdot \frac{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3-1}}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3-1}} = \frac{1}{n^\alpha} \frac{\cancel{n^3}+1-(\cancel{n^3}-1)}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3-1}}$$

$$= \frac{2}{n^\alpha \cdot n^{3/2}\left(\sqrt{1+1/n^3} + \sqrt{1-1/n^3}\right)}$$

$$= \frac{2}{n^{\alpha+3/2}\underbrace{\left(\sqrt{1+1/n^3} + \sqrt{1-1/n^3}\right)}_{\substack{\geq 1 \\ \leq \sqrt{2}+1}}} \leq \frac{2}{n^{\alpha+3/2}}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{} + \sqrt{}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

Ho scoperto che

$$\frac{2}{\sqrt{2}+1} \cdot \boxed{\frac{1}{n^{\alpha+3/2}}} \leq a_n \leq \frac{2}{n^{\alpha+3/2}}$$

Ricordo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+3/2}} < \infty \iff \alpha + \frac{3}{2} > 1$$

$$\iff \alpha > -\frac{1}{2}$$

Fatto Noto

Per confronto la serie data

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \text{se e solo se} \quad \alpha > -1/2$$

$\square$