Lezione 12

giovedì 31 ottobre 2013
14:20

Esercizio 7 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{1+n+x^2n^2}.$$

Soluzione. Distinguo i casi: 1) $x=0$ 2) $x \neq 0$.

Caso 1): La serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Osservo che $\sqrt{n+1} \leq \sqrt{n+n} = \sqrt{2}\sqrt{n}$

Prendo ai reciproci:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\, n^{1/2}} = \infty$$

diverge

Fatto Noto perché $\frac{1}{2} \leq 1$

Per confronto diverge anche la serie data.

Caso 2):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+1+x^2n^2}$$

Siccome $x \neq 0$ avremo

$$n+1+x^2n^2 \geq x^2n^2 \quad \forall n \geq 1$$

e dunque

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+1+x^2n^2} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{x^2n^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{x^2}\,\frac{n^{1/2}}{n^2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{x^2}\,\frac{1}{n^{3/2}}}$$

Per confronto:

$$\sum^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\quad} \leq \frac{\sqrt{2}}{\quad} \sum^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$$

converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+1+x^2n^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{x^2} \sum_{n=1} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$$

perché $3/2 > 1$

La serie data converge.

<u>Esercizio 8</u> Al variare di $x \in \mathbb{R}$ e di $k \in \mathbb{R}$ con $k \neq 0$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{e^{-\frac{|n-x|}{k}}} = a_n \, .$$

Soluzione. Se fosse $k=1$ e $x=0$ $\longrightarrow$ $\sum e^{-n} = \sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$

serie geometrica convergente.

Osservo che la serie è a termini ≥ 0 infatti $e^{-|n-x|/k} > 0$. Dunque posso usare il Criterio della Radice:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{-\frac{|n-x|}{k}}\right)^{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{|n-x|}{n \cdot k}} = e^{-\frac{1}{k}}$$

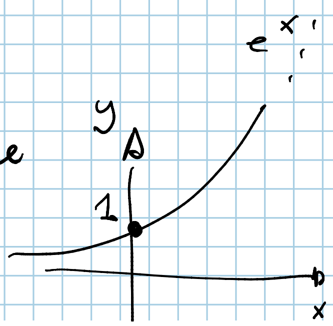
Osservo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|n-x|}{n} = \lim_{n\to\infty} \left|1 - \frac{x}{n}\right| = 1$$

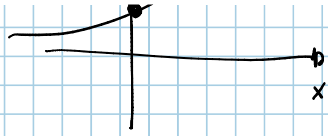
Per il Cr. Radice:

(1) $L = e^{-1/k} < 1 \implies$ serie converge

$$e^{-1/k} < 1 \iff -\frac{1}{k} < 0$$



$$e^{-1/k} < 1 \iff -\frac{1}{k} < 0$$



$$\iff k > 0$$

(2) $L = e^{-1/k} > 1 \implies$ Serie Diverge

$$e^{-1/k} > 1 \iff k < 0$$

Il caso $L=1$ non si presenta.

Il numero e e forma indeterminata $[1^\infty]$

Sappiamo che la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad \text{converge}$$

(Criterio del Rapporto)

Definiamo

$$\boxed{e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}}.$$

<u>Teorema</u> Il seguente limite esiste finito ed inoltre:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Dimostrazione. Proveremo che la successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad n \geq 1$$

è crescente e limitata (e dunque converge).

Conti

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \qquad \text{Binomio Newton}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{\underbrace{n^k}_{= n\cdot\ldots\cdot n \text{ } k \text{ volte}}} \frac{1}{k!}$$

$$\boxed{a_n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{<1} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{<1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{<1} \cdot \frac{1}{k!}}$$

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\frac{1}{k!}$$

Osservo che

$$\left(1-\frac{1}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \iff -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1}$$

$$\iff \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

$$\iff n < n+1$$

VERO

Analog

$$\left(1-\frac{2}{n}\right) < \left(1-\frac{2}{n+1}\right)$$

$$\vdots \qquad \qquad \text{VERE}$$

$$\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

Conclusione : $a_n < a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

La succ. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente .

Inoltre avremo anche

Inoltre avremo anche

$$a_n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$$

Dunque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata.

Ho dimostrato che esiste finito

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e$$

Ora dimostro che

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ge e$$

e se ci riesco, avremo finito.

Dunque, fissiamo $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $m \le n$:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} \ge$$

$$\ge \sum_{k=0}^{m} \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}$$

Passo al limite per $n \to \infty$ (con m bloccato):

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ge \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$$

Ed ora con $m \to \infty$ trovo

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ge \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e. \quad \text{cvd.}$$

<u>Osservazione 1</u> Si potrebbe anche dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \underset{\text{Limite Notevole.}}{=} e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

<u>Osservazione 2</u> Il numero e verifica

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \geq \sum_{k=0}^{3}\frac{1}{k!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6} = 2+\frac{2}{3}$$

Inoltre (prova omessa)

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} < \boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}} + \frac{n}{n!\cdot(n-1)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

E con $n=4$ trovo

$$e < 2+\frac{2}{3}+\frac{1}{3!\cdot 3} = 2+\frac{2}{3}+\frac{1}{18} < 3.$$

<u>Esercizio 9</u> Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}.$$

Soluzione. Serie a termini positivi $\dfrac{n!}{n^n} > 0$ $= a_n$

Posso usare il Criterio del Rapporto:

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^n} \cdot n^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

perché $e > 2$

Per il Crit. Rapporto la serie converge.

Serie a segno alterno

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione numerica tale che $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Chiameremo una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n}_{\text{Fattore alternante}} \cdot a_n$$

Serie a segno alterno

Teorema (Criterio di Leibniz) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che:

1) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (successione decrescente)
2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (successione infinitesima)

Allora la serie a segno alterno

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Converge.

<u>Esempio</u> La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge per il Crit. di Leibniz perché $a_n = 1/n$

1) è decrescente

2) è infinitesima.

<u>Prova</u>. Considero le somme parziali di indice pari e dispari:

$$S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$$

Conti:

- $$S_{2n+1} = S_{2n} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1}$$
$$= S_{2n} - \underset{\underset{0}{\vee}}{a_{2n+1}} \leq S_{2n}$$

- $$S_{2(n+1)} = S_{2n} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2}$$
$2n+2$
$$= S_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq S_{2n}$$

$a_{2n+1} \geq a_{2n+2}$ È decrescente

$a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$ Ip 1)

$$a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0 \qquad \underline{\underline{\text{Ip } 1)}}$$

Ho scoperto che $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ <u>decresce</u>.

- $$s_{2n+1} = s_{2n-1} + (-1)^{2n} a_{2n} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1}$$

$$= s_{2n-1} + \underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{\geqslant 0} \geqslant s_{2n-1}$$

Ho scoperto che $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ è <u>crescente</u>.

Conclusioni

$$\underline{\underline{s_1}} \leqslant s_3 \leqslant s_5 \leqslant \dots \leqslant s_{2n+1} \leqslant s_{2n} \leqslant \dots \leqslant s_4 \leqslant \underline{\underline{s_2}}$$

Ovvero:

$(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ cresce ed è sup. limitata

$(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ decresce ed è inf. limitata.

Quindi esistono finiti i due limiti

$$L_1 = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$$

$$L_2 = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$$

Inoltre

$$L_1 - L_2 = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n}$$

$$= \lim s_{2n+1} - s_{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = 0$$

$\Rightarrow \quad L_1 = L_2$

Questo prova che esiste finito

$$L = L_1 = L_2 = \lim_{n\to\infty} s_n .$$