Lezione 13
giovedì 7 novembre 2013
14:16

Convergenza Assoluta

Def. Diciamo che una serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty .$$

Teorema (Criterio della convergenza assoluta)

Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente allora converge anche semplicemente. Ed inoltre

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| .$$

Dim. Definiamo le seguenti parti positive e parti negative di a_n:

$$a_n^+ := \max\{a_n, 0\}$$

$$a_n^- := \min\{a_n, 0\}$$

Proprietà

i) $a_n^+ \geq 0$ e $a_n^- \leq 0$

ii) $a_n = a_n^+ + a_n^-$

iii) $|a_n| = a_n^+ - a_n^-$

iv) $a_n^+ \leq |a_n|$ e $-a_n^- \leq |a_n|$

Dal Teorema del confronto

$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

$\Rightarrow$ Converge

$$0 \leq -\sum_{n=0}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=0}^{\infty} -a_n^- \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

$\Rightarrow$ Converge

Ora

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k^+ + a_k^-) = \sum_{k=0}^{n} a_k^+ + \sum_{k=0}^{n} a_k^-$$

Converge $\quad n \to \infty \quad n \to \infty \quad$ Converge

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=0}^{\infty} a_k^-$$

$n \to \infty$ $\Longleftarrow$ Convergono

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Inoltre

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k^+ + a_k^- \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k^+| + |a_k^-| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k^+ - a_k^- = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

Passo al limite per $n \to \infty$ e trovo

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| .$$

$\square$

ES. 1 Discutere la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} .$$

Soluzione. Serie a segno alterno: utilizzo il criterio di Leibniz. Detto

$$a_n = \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

e verifico se:

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. È vero?

2) La succ. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente: $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

È vera!

Se 1) e 2) sono vere allora la serie converge per il criterio di Leibniz.

$\sqrt[3]{\cdot}$ è cont.

(1)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} \overset{\downarrow}{=} \sqrt[3]{\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} =$$

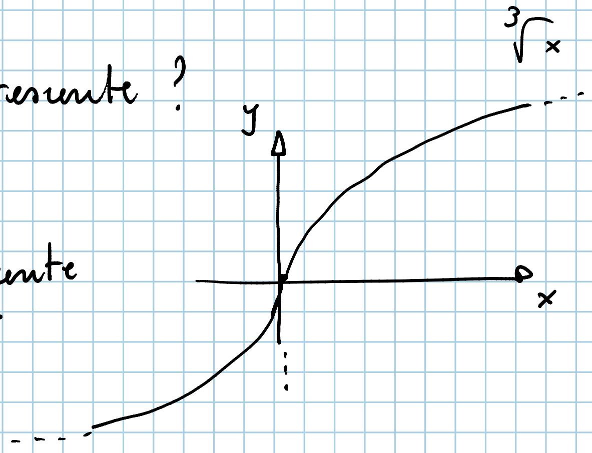
$$\underset{\substack{\sin(\cdot) \\ \text{è cont.}}}{=} \sqrt[3]{\sin\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\right)} = \sqrt[3]{\sin(0)} = \sqrt[3]{0} = 0.$$

ok. 1) è vera. ✓

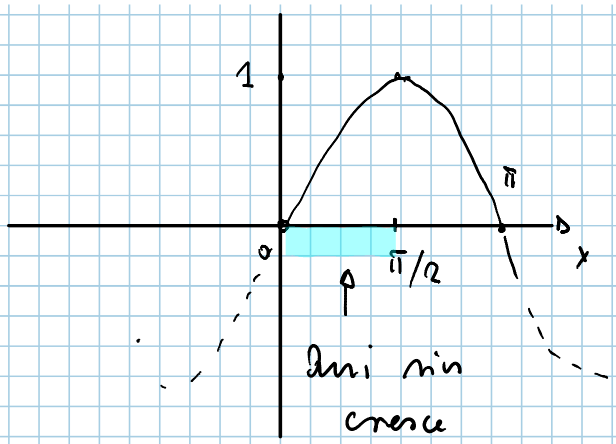
(2) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente?

Osservo che:

- $\sqrt[3]{x}$ è <u>crescente</u>



- La funzione $\sin(x)$ è crescente per $x \in [0, \pi/2]$



• Dunque la funzione composta $\sqrt[3]{\sin(x)}$ cresce per $x \in [0, \pi/2]$

• Conclusione:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow \underset{a_n}{\underset{\parallel}{\sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}}} < \underset{a_{n-1}}{\underset{\parallel}{\sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}}}$$

Dunque $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ decresce.

$\square$

<u>Esercizio 2</u> Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{5^n \log(n+1)} \cdot (x^2 - 2x)^n .$$

Svolgimento. Serie <u>NON</u> a segno positivo.
<u>NON</u> posso usare direttamente i criteri della Radice e del Rapporto.

Procedo così:

- Prima studio la converg. assoluta
- Dirò che: Conv. assoluta $\Rightarrow$ Conv. semplice
- Esamino possibili casi in cui ci sia conv. semplice (Leibniz) ma non conv. assoluta.

Studio la convergenza assoluta: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ovvero:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-4)^n}{5^n \log(n+1)} (x^2-2x)^n \right| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n \log(n+1)} |x^2-2x|^n$$ serie a termini positivi

Criterio della Radice:

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n}{5^n \log(n+1)} |x^2-2x|^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{\log(n+1)}} |x^2-2x|$$

$$= \frac{4}{5} |x^2-2x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\log(n+1)}}$$

Calcolo il limite:

$$\sqrt[n]{\log 2} \le \sqrt[n]{\log(n+1)} \le \sqrt[n]{n}$$

$\sqrt[n]{\log 2} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$, $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ Fatti Noti

confronto: $\sqrt[n]{\log(n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

Conclusione

$$L(x) = \frac{4}{5} |x^2-2x| .$$

$$L(x) = \frac{4}{5} |x^2 - 2x| .$$

(1) Se $L(x) < 1$ allora la serie data converge assolutamente e dunque anche semplicemente.

(2) Se $L(x) > 1$ allora la serie non converge assolutamente. Di più in questo caso si ha

$$\lim_{n \to \infty} |a_n| = +\infty$$

Quindi NON può essere $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Quindi NON c'è nemmeno convergenza semplice.

Il caso $L(x) = 1$ sarà da discutere a parte.

Devo risolvere la diseq.:

$$L(x) < 1 \iff \frac{4}{5} |x^2 - 2x| < 1 \iff |x^2 - 2x| < \frac{5}{4}$$

Risolvo

$$|x^2 - 2x| < \frac{5}{4} \iff \begin{cases} x^2 - 2x < \frac{5}{4} \\ x^2 - 2x > -\frac{5}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 2x - \frac{5}{4} < 0 & (1) \\ x^2 - 2x + \frac{5}{4} > 0 & (2) \end{cases}$$

Radici di $x^2 - 2x - \frac{5}{4} = 0$:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+5}}{2} = \frac{2 \pm 3}{2} \begin{matrix} \nearrow 5/2 \\ \searrow -1/2 \end{matrix}$$

Quindi:

(1) vera $\iff -1/2 < x < 5/2$

(1) vera $\iff -1/2 < x < 5/2$

Radici di $x^2 - 2x + \frac{5}{4} = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-5}}{2}$$

$\Delta < 0$ No Radici Reali

Conclusione parziale

(2) vera $\forall x \in \mathbb{R}$

Conclusione generale $L(x) < 1 \iff -\frac{1}{2} < x < 5/2$

CS e CA si

Mentre per $L(x) > 1 \iff x \in (-\infty, -1/2) \cup (5/2, +\infty)$

No CS e No CA.

Rimane il caso $L(x) = 1$ ovvero $x = -1/2$ oppure $x = 5/2$

$$x^2 - 2x \overset{x=-1/2}{=} \frac{1}{4} + 1 = 5/4$$

$$x^2 - 2x \overset{x=5/2}{=} \frac{25}{4} - 5 = \frac{25-20}{4} = 5/4$$

In entrambi i casi trovo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{5^n \log(n+1)} \left(\frac{5}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+1)}$$

Convergenza semplice: Serie a segno alterno: Uso Leibniz

Devo verificare:

(1) $\lim \frac{1}{\cdot} = 0$ si Verificato.

$n \to \infty \quad \log(n+1)$

(2) $\left(\frac{1}{\log(n+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente? Sì

Perché $\log(n+1)$ cresce con n e quindi

$$\frac{1}{\log(n+1)} \text{ decresce.}$$

Criterio Leibniz: c'è convergenza semplice.

Studio la convergenza assoluta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\log(1+n)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(1+n)}$$

Questa serie diverge. Infatti:

$$\log(1+n) \leq n \implies \frac{1}{\log(1+n)} \geq \frac{1}{n}$$

e perciò per confronto:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}}_{\text{diverge}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \qquad \square$$

Ricordare:

- Convergenza Assoluta $\implies$ Convergenza Semplice

Ma:

- Conv. Semplice $\not\Longrightarrow$ Converg. Assoluta.

- Criterio Radice \ Rapporto si possono usare SOLO per serie con termine positivo per serie con termine positivo.

- No Conv. Semplice $\Rightarrow$ No Conv. Assoluta.

- Può essere utile questo fatto:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 .$$

Dim. Per assurdo: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Allora:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \left| \lim_{n\to\infty} a_n \right| = |0| = 0$$