Lezione 14
venerdì 8 novembre 2013
10:16

FUNZIONI DI VARIABILE REALE

Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ due insiemi. Una <u>funzione</u>

$$f : A \longrightarrow B$$

è un'applicazione, regola, legge che ad ogni elemento $x \in A$ associa (fa corrispondere) un univocamente determinato elemento $f(x) \in B$.

Diremo che
i) $A = D(f)$ è il <u>dominio</u> di f

ii) B è il <u>codominio</u> della funzione f

<u>Immagine</u> L'insieme

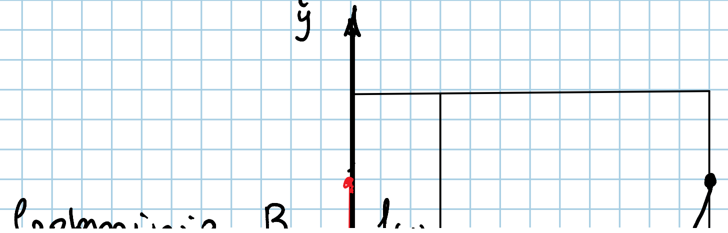
$$f(A) = \{ f(x) \in B : x \in A \} \subset B$$

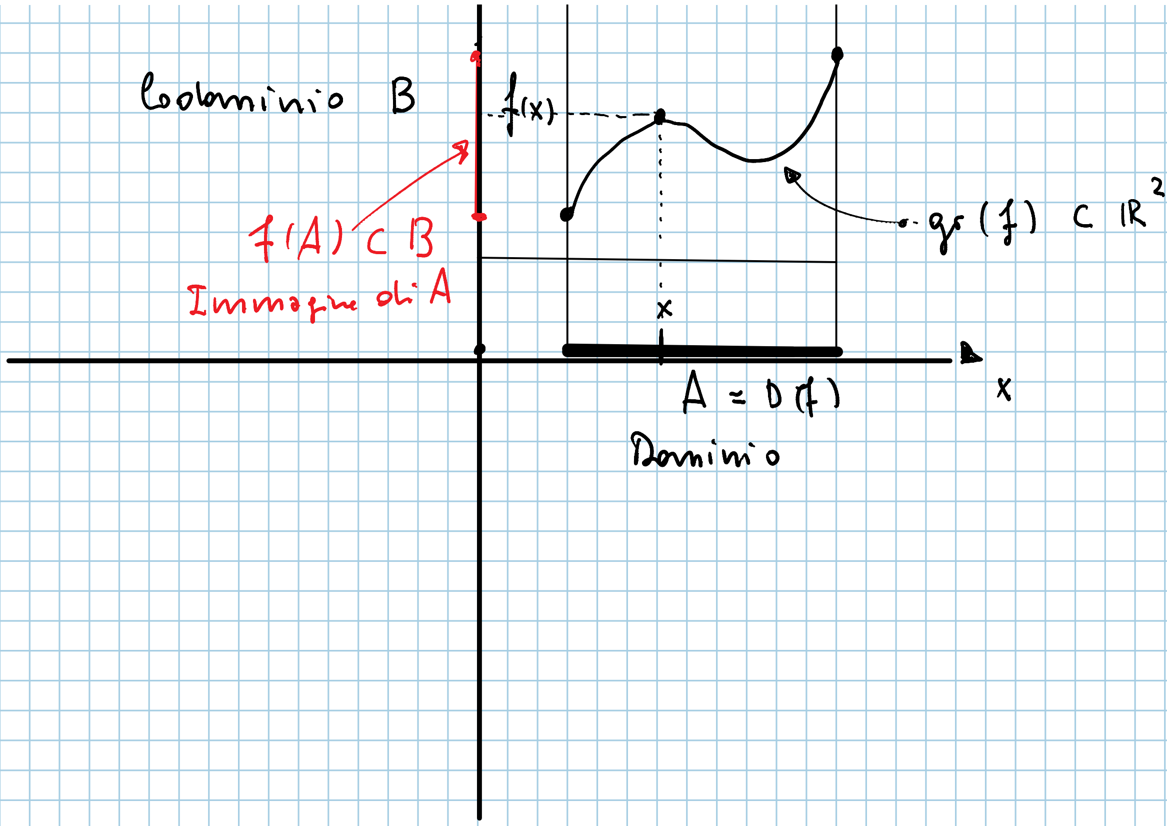
si dice <u>immagine</u> di A rispetto alla funzione f.

In generale $f(A) \subset B$.
$\neq$ potrebbe essere

<u>Grafico di f</u> Il <u>grafico</u> della funzione $f : A \to B$ è il seguente sottoinsieme del piano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$$gr(f) = \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in A \} \subset \mathbb{R}^2 .$$





Funzioni pari e dispari

Diciamo che un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è simmetrico se

$$x \in A \implies -x \in A.$$

Sia ora $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione.

- Diciamo che f è <u>pari</u> se:

$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in A = D(f)$$

- Diciamo che f è <u>dispari</u> se:

$$f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in A.$$

Esempio

- $f(x) = \dfrac{x \sin x}{\dots}$, $x \in \mathbb{R} = D(f)$, è pari:

$1+x^2$

$$f(-x) = \frac{(-x)\cdot \sin(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{(-x)\cdot(-\sin(x))}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x \sin(x)}{1+x^2} = f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- $f(x) = \dfrac{x^3 \cdot \cos(x)}{\log(2+|x|)}$, $x \in \mathbb{R} = D(f)$, è dispari:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 \cos(-x)}{\log(2+|-x|)} = -\frac{x^3 \cdot \cos(x)}{\log(2+|x|)} = -f(x)$$

Estremo superiore etc.

Def. Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione. Definiamo l'estremo superiore di f su A:

$$\sup_A f = \sup_{x \in A} f(x) := \sup \{ f(x) \in \mathbb{R} : x \in A \} =$$

$$= \sup f(A).$$

Analogamente definiamo l'estremo inferiore di f su A:

$$\inf_A f = \inf_{x \in A} f(x) := \inf \{ f(x) \in \mathbb{R} : x \in A \}$$

$$= \inf f(A).$$

Diremo che $f: A \to \mathbb{R}$ è limitata se:

$$-\infty < \inf_A f \leq \sup_A f < \infty.$$

Osservazione Risulta $L = \sup f$, con $L \in \mathbb{R}$,

<u>Osservazione</u> Risulta $L = \sup_A f$, con $L \in \mathbb{R}$, se e solo se:

(i) $f(x) \leq L \quad \forall x \in A$;

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A$ tale che $f(x) > L - \varepsilon$.

<u>Definizione (Max\min)</u> Se esiste un punto $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = \sup_A f$ allora scriveremo

$$\underline{\max_A f} = \sup_A f = f(x_0) \quad (\text{Valore massimo di } f \text{ su } A)$$

e chiameremo $x_0 \in A$ un <u>punto</u> di massimo per f su A.

Analogamente se esiste un p.to $x_1 \in A$ tale che $f(x_1) = \inf_A f$ allora scriveremo

$$\min_A f = \inf_A f = f(x_1) \quad (\text{Valore minimo di } f \text{ su } A)$$

e chiameremo $x_1 \in A$ un punto di minimo di f su A.

<u>Esercizio</u> Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Calcolare $\sup_{\mathbb{R}} f$, $\inf_{\mathbb{R}} f$ e $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ immagine di f.

Soluzione. f è una funzione pari. Basta esaminarla per $x \geq 0$. Inoltre $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e inoltre $f(0) = 0$. Deduco che

$$\inf_{\mathbb{R}} f = \min_{\mathbb{R}} f = 0 = f(0)$$

$$\inf_{\mathbb{R}} f = \min_{\mathbb{R}} f = 0 = f(0)$$

e dunque $x=0$ è un punto di minimo (assoluto)
Ed è l'unico.

Studio l'estremo superiore. Certamente:

$$f(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \iff \frac{x^2}{1+x^2} < 1$$

$$\iff x^2 < 1+x^2 \iff 0 < 1$$

Cerco di provare che

$$\sup_{\mathbb{R}} f = 1$$

Mi rimane da controllare che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(x) > 1-\varepsilon .$$

Risolvo la diseq.:

$$f(x) > 1-\varepsilon \iff \frac{x^2}{1+x^2} > 1-\varepsilon$$

$$\iff x^2 > (1-\varepsilon)(1+x^2) = 1+x^2-\varepsilon-\varepsilon x^2$$

$$\iff \varepsilon - 1 > x^2(1-\varepsilon-1) = -\varepsilon x^2$$

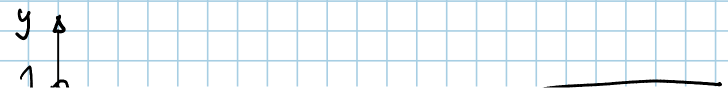
$$\iff \frac{\varepsilon-1}{-\varepsilon} < x^2$$

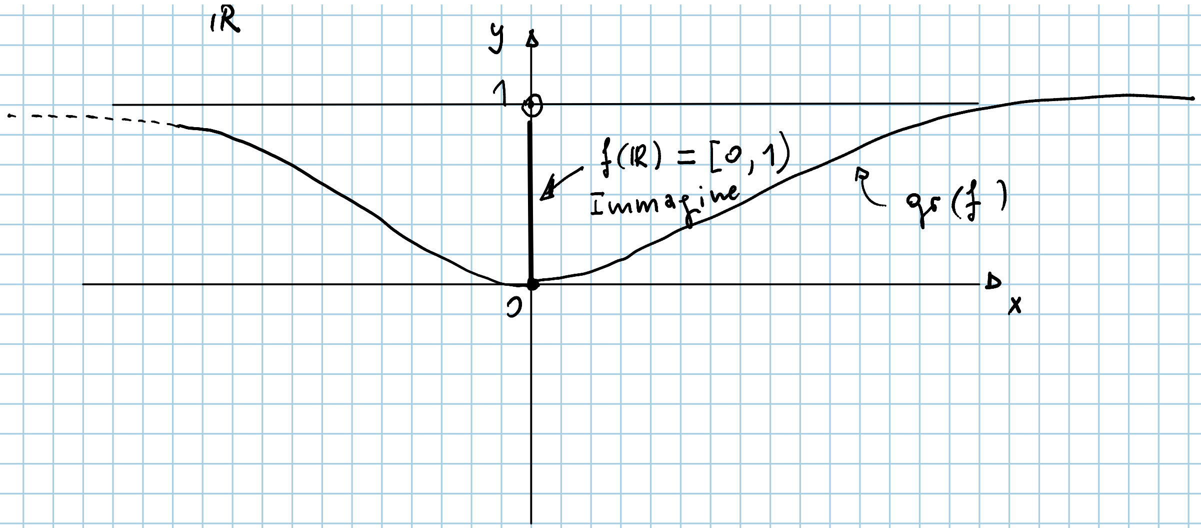
$$\iff \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} < x^2$$

Basta prendere $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x| > \sqrt{\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}$

Questo prova che $1 = \sup_{\mathbb{R}} f$.

Tuttavia $\max_{\mathbb{R}} f$ <u>NON</u> esiste perchè $f(x) < 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.





Definizione (Funzione iniettiva e suriettiva)

Sia $f: A \to B$ una funzione. Diremo che:

i) f è iniettiva su A se: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
(Equiv.: $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$)
(scriveremo f è 1-1 "f è iniettiva")

ii) f è suriettiva su B se: $\forall y \in B\ \exists x \in A$ tale che $f(x) = y$.
(f è su)

iii) f è biiettiva se f è iniettiva e suriettiva.

Definizione (Funzione inversa). Sia $f: A \to B$ una funzione iniettiva e suriettiva. Allora possiamo definire la funzione inversa $f^{-1}: B \to A$ in questo modo:

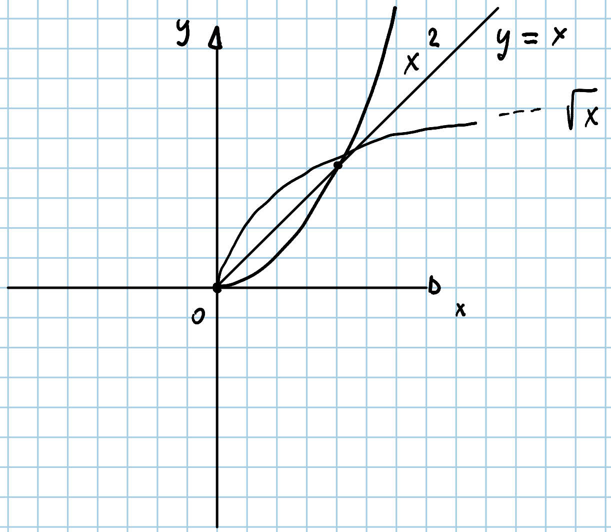
DEFINIZIONE

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

con $y \in B$ ed $x \in A$. (Osservazione: Definizione ben posta)

Osservazione Il grafico della funzione inversa f^{-1} si ottiene dal grafico di f tramite una riflessione rispetto alla bisettrice del 1° - 3° quadrante $y = x$.

Esempio $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ $f(x) = x^2$ è 1-1 e su da $[0,\infty)$ in $[0,\infty)$. La sua funzione inversa è $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.



Esercizio Sia $f: [0,1] \to [0,1]$ la funzione:

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad x \in [0,1].$$

1) Provare che f è 1-1 e su

2) Calcolare la funzione inversa $f^{-1}: [0,1] \to [0,1]$.

Soluzione.

1) Provo che f è iniettiva: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
$x, y \in [0,1]$

$$f(x) = f(y) \iff \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2y}{1+y^2}$$

$$\iff 2x + 2xy^2 = 2y + 2yx^2$$

$$\iff 2xy^2 + 2x - 2y - 2yx^2 = 0$$

$$\iff \boxed{xy^2} + x - y \boxed{- yx^2} = 0$$

$$\iff xy(y-x) + x - y = 0$$

$\iff (x-y)(1-xy) = 0$

$\iff x-y=0$ oppure $1-xy=0$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow \quad x,y \in [0,1]$

$x=y$ fine $\qquad\qquad xy = 1$

$\Updownarrow \qquad$ fine.

$x=y=1$

Cerco di provare che $f : [0,1] \to [0,1]$ è suriettiva. Cioè:

$$\forall y \in [0,1] \quad \exists x \in [0,1] \text{ tale che } f(x) = y$$

Equazione:

$$f(x) = y \iff \frac{2x}{1+x^2} = y \iff 2x = y + yx^2$$

$$\iff yx^2 - 2x + y = 0$$