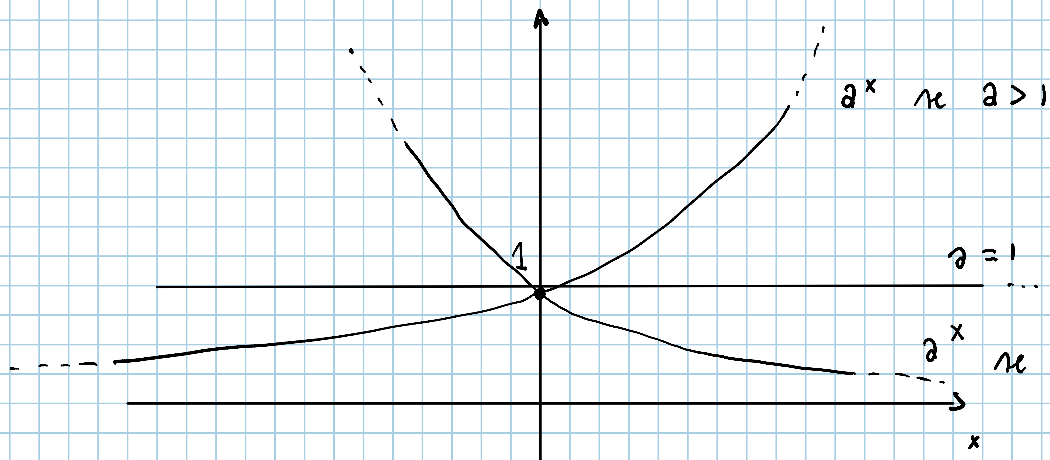
Lezione 17

venerdì 15 novembre 2013
10:12

Esponenziali e logaritmi

$a > 0$ base, $f_a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ è la funzione

$$f_a(x) = a^x , \qquad x \in \mathbb{R}$$



- Se $a > 1 \Rightarrow f_a$ è strett. crescente e quindi
  $f_a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ è 1-1 e su

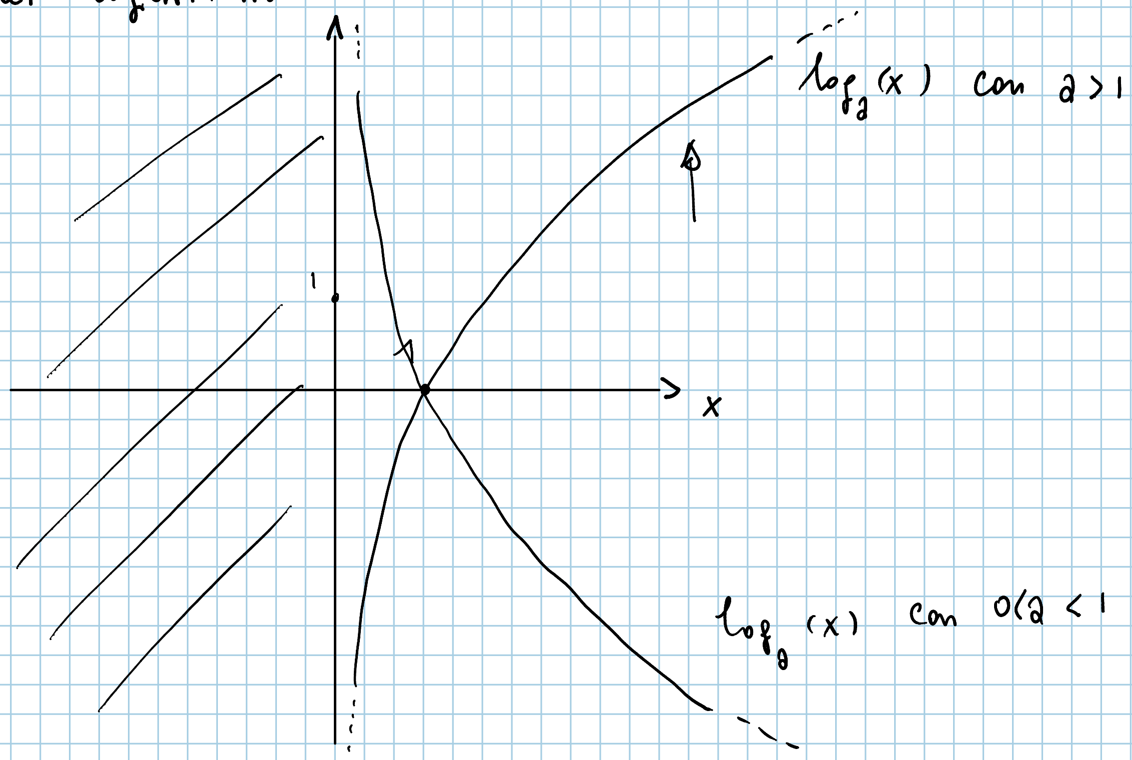
- Se $0 < a < 1 \Rightarrow f_a$ è strett. decrescente e quindi
  $f_a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ è 1-1 e su.

Dunque per $a > 0$ e $a \neq 1$ possiamo definire la funzione inversa $f_a^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ che chiameremo logaritmo in base a

$$\log_a(x) = f_a^{-1}(x) \qquad x > 0$$

Notazione: Se $a = e$ scriveremo $\log_e(x) = \log(x) = \ln(x)$.

Grafici del logaritmo



Teorema (Proprietà dei logaritmi) Sia $a>0$ con $a \neq 1$.

(1) $a^{\log_a(x)} = x \quad \forall x>0$; $\log_a(a^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(2) $\log_a(x^\beta) = \beta \cdot \log_a(x) \quad \forall x>0 \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$

(3) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad \forall x,y>0$

e $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \quad \forall x,y>0$

(4) $\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x) \quad b>0, b \neq 1 \quad \forall x>0$

Dim. Verifico 2)

$$\log_a(x^\beta) = \beta \cdot \log_a(x) \Longleftrightarrow a^{\log_a(x^\beta)} = a^{\beta \cdot \log_a(x)} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x^\beta = \left(a^{\log_a(x)}\right)^\beta \Longleftrightarrow x^\beta \underset{\text{sì}}{=} x^\beta$$

proprietà delle potenze

Verifico 3)

$$\log_a(x\cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \iff \underline{a^{\log_a(x\cdot y)}} = a^{\log_a(x)+\log_a(y)}$$

$$\iff x\cdot y = a^{\log_a(x)}\, a^{\log_a(y)} \iff \underset{\text{sì}}{x\cdot y = x\cdot y}$$

Verifico 4):

$$\log_a(b)\cdot \underbrace{\log_b(x)}_{=\beta} \overset{2)}{=} \log_a(b^{\beta}) = \log_a\left(b^{\log_b(x)}\right) =$$

$$= \log_a(x) \qquad \square$$

Dominio di funzione. Esercizio

Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \log\left(\left(\frac{x}{x-1}\right)^x - 1\right).$$

Soluzione Devono essere verificate tutte le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} (1) & x \neq 1 & \text{Altrimenti } \frac{x}{x-1} \ \underline{\text{NON}} \text{ è definito} \\ (2) & \frac{x}{x-1} \geq 0 & \text{Altrimenti } \left(\frac{x}{x-1}\right)^x \ \underline{\text{NON}} \text{ è definito} \\ (3) & x \neq 0 & \text{Altrimenti } 0^0 \text{ che } \underline{\text{NON}} \text{ è definito} \\ (4) & \left(\frac{x}{x-1}\right)^x - 1 > 0 & \end{cases}$$

(2) e (3) $\overset{\text{verificate}}{\text{insieme}}$ sono $\frac{x}{x-1} > 0$

$N(x) = x > 0 \iff x > 0$

$D(x) = x-1 > 0 \iff x > 1$

0 1

$D(x) = x-1 > 0 \iff x > 1$

		0		1	
$N(x)$	$---$	X	$+++$	$+$	$+++$
$D(x)$	$---$		$---$	X	$+++$
$\frac{N}{D}$	$+++$	X	$---$	X	$+++$

Dunque $\frac{x}{x-1} > 0 \iff x < 0$ oppure $x > 1$

$$\iff x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

Condizione 4):

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^x - 1 > 0 \iff \left(\frac{x}{x-1}\right)^x > 1$$

Usato il fatto che log è strett. crescente

$$\iff \log\left(\frac{x}{x-1}\right)^x > \log(1)$$

$$\iff x \log\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0$$

Studio il segno di

$$\log\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0 = \log(1) \iff \frac{x}{x-1} > 1 \iff$$

$$\iff \frac{x}{x-1} - 1 > 0 \iff \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + 1}{x-1} > 0$$

$$\iff \frac{1}{x-1} > 0 \iff x > 1.$$

Riassunto

Esclusi per i conti sopra

		0		1	
x	$---$				$+++$
$\log\left(\frac{x}{x-1}\right)$	$---$	X		X	$+++$

$x \log\left(\frac{x}{x-1}\right)$ $\quad +++ \qquad\qquad +++$

In conclusione

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

$\square$

Limiti di funzione

Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme e sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione.

Def (Punto di Accumulazione) Diciamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione dell'insieme $A \subset \mathbb{R}$ se:

$$I_\delta(x_0) \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0$$

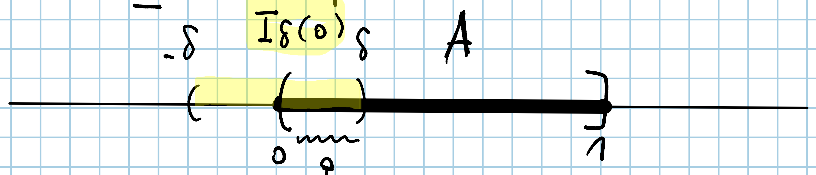
arb. piccolo

ovvero

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0.$$

Esempio 1 $\quad A = (0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$

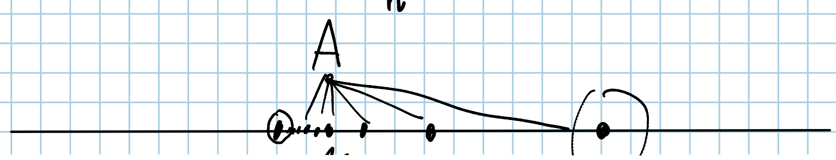
Allora $0 \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione di A:

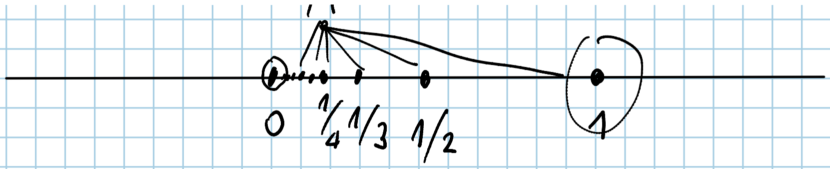


Questa intersezione è sempre $\forall \delta > 0$ non vuota.

Ovviamente anche tutti i punti di questo A sono p.ti di accumulazione di A.

Esempio 2 $\quad$ Sia $A = \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} : n = 1, 2, 3 \ldots \right\}$.





Chiaramente $0 \in \mathbb{R}$ è un p.to di accumulazione di A:
($0 \notin A$)

$$(-\delta, \delta) \cap A \neq \emptyset$$ basta prendere $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n} < \delta$

$\frac{1}{n} \in (-\delta, \delta) \cap A$.

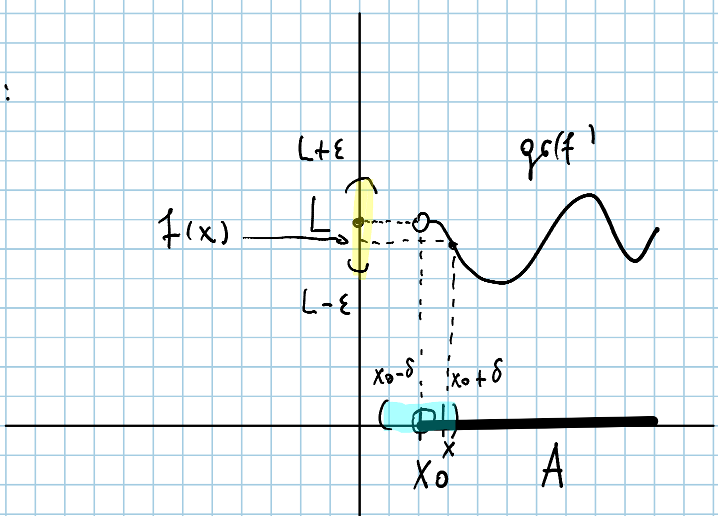
0 è l'unico p.to di Accum. di A.

<u>Definizione 1 (Limite)</u> Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in \mathbb{R}$ p.to di accumulazione di A.
Diciamo che f ha limite $L \in \mathbb{R}$ (finito) per $x \to x_0$ se:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in A$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$.
$x \neq x_0$

Scriveremo in questo caso:

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Disegno:



$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tale che:

$$x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

$x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

Proposizione (Unicità del Limite)

Se $f(x)$ ha limite $L \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$, allora questo limite è unico.

Dim. Omessa

Proposizione (Permanenza del segno)

Supponiamo che esista $\lim_{x \to x_0} f(x) = L > 0$.
Allora esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in A = D(f) \text{ tale che } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Dim. Scelgo $\varepsilon = L/2 > 0$. Dalla Def. di limite $\exists\, \delta > 0$

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x \in A \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta$$

Dunque

$$f(x) = L + \underbrace{f(x) - L}_{\substack{V/\ \text{VERA} \\ -|f(x) - L|}} \geq L - |f(x) - L| \geq L - \varepsilon = \frac{L}{2} > 0$$

Infatti $f(x) - L \geq -|f(x) - L| \iff |f(x) - L| \geq L - f(x)$

$\square$

Definizione Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione ed $x_0 \in \mathbb{R}$ p.to di accumulazione di A. Diciamo che $f(x)$ tende a $+\infty$ per $x \to x_0$ se :

$\forall M \in \mathbb{R}$ (molto grande) $\exists \delta > 0$ tale che $f(x) \geq M$ $\forall x \in A$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$

Scriveremo in questo caso:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty .$$

Esercizio per casa Scrivere la definizione per $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Esercizio Usando la definizione provare che

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Fissato $M > 0$ cerco $\delta > 0$ (che dipenderà da M) tale che

$$0 < |x - 0| < \delta \implies f(x) \geq M$$

Conti:

$$f(x) \geq M \iff \frac{1}{x^2} \geq M \iff x^2 \leq \frac{1}{M}$$
$$\iff |x| = \sqrt{x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Con la scelta $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ si ottiene: $|x| \leq \delta \implies f(x) \geq M$.

$\square$

Esercizio Usando la definizione provare che

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x + 3}{3x + 2} = \frac{3}{2}$$

Fisso $\varepsilon > 0$ e cerco $\delta > 0$ tale che per $0 < |x - 0| < \delta$ si abbia:

$$\left| \frac{2x + 3}{} - \frac{3}{} \right| < \varepsilon$$

$3x+2$ $\qquad$ 2

Conti:

$$\left| \frac{4x \cancel{+6} - (3x+\cancel{6})}{2(3x+2)} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{-5x}{2(3x+2)} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{5|x|}{2|3x+2|} < \varepsilon, \qquad 5|x| < 2\varepsilon\,|3x+2|$$

Al quadrato:

$$25x^2 < 4\varepsilon^2(9x^2+\underline{12x}+4)$$

$$\underbrace{(25-36\varepsilon^2)}_{>0 \text{ se } \varepsilon \text{ è piccolo}} x^2 - 48\varepsilon^2 x - 16\varepsilon^2 < 0$$

Le radici sono

$$x_\pm = \frac{+48\varepsilon^2 \pm \sqrt{48^2\varepsilon^4 + \boxed{4\cdot 16\varepsilon^2(25-36\varepsilon^2)}}}{2(25-36\varepsilon^2)}$$

$\Delta > 0$ per $\varepsilon > 0$ piccolo $\Rightarrow$ esistono $x_\pm$ distinte

Inoltre $x_+ > 0$ mentre $x_- < 0$.

Dunque l'intervallo (x_-, x_+) contiene $0 \in \mathbb{R}$
e scegliendo $\delta > 0$ tale che $\delta < x_+$ e $\delta < |x_-|$
avremo

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon.$$