Lezione 19

giovedì 21 novembre 2013
14:02

Forme indeterminate. In particolare $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Le forme indeterminate sono:

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right],\ \left[\frac{0}{0}\right],\ [\infty-\infty],\ [0\cdot\infty],\ [0^0],\ [1^\infty]$$

$$[\infty^0]$$

Teorema Si hanno i seguenti limiti:

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0 \qquad \beta>0,\ a>1.$

(2) $\lim_{x\to\infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \qquad \alpha>0,\ \beta>0,\ a>1$

Dim (1) Come per le succ.

(2) Calcolo il limite con la tecnica di sostituzione.
Poniamo

$$\boxed{y=\log_a x} \iff a^y = a^{\log_a x} = x$$

Osservo che

$$x\to\infty \iff y\to\infty$$

Dunque

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^\beta}{(a^y)^\alpha}$$

per (1)

$$= \lim \frac{y^\beta}{(a^\alpha)^y} = 0.$$

$$y \to \infty \qquad (a^\alpha)^y$$

dove $a^\alpha > 1$ $\square$

Esercizio. Provare che

$$L = \lim_{x \to 0^+} x^\beta \log x = 0 \qquad \beta > 0$$

Soluzione. Tecnica di sostituzione

$$y = -\log x \iff -y = \log x$$
$$\iff e^{-y} = e^{\log x} = x$$

Cosicché

$$x \to 0^+ \iff y \to +\infty$$

Allora

$$L = \lim_{y \to \infty} (e^{-y})^\beta \cdot (-y)$$

$$= -\lim_{y \to \infty} \frac{y}{(e^y)^\beta} = -\lim_{y \to \infty} \frac{y}{(e^\beta)^y} = 0$$

$\square$

dove $e^\beta > 1$

perché $\beta > 0$

Esercizio Calcolare il limite:

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{\log_2 (e^x + x^2)}{x + \sin x + \log_2 x}.$$

Soluzione. Abbiamo una FI del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Conti:

$$\log_2 \left(e^x \cdot \left(1 + \frac{x^2}{\cdot}\right)\right)$$

Conti:

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{\log_2\left(e^x \cdot \left(1+\frac{x^2}{e^x}\right)\right)}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}+\frac{\log_2 x}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot\log_2 e + \log_2\left(1+\frac{x^2}{e^x}\right)}{x\left(1+\ldots+\ldots\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\log_2 e + \frac{1}{x}\log_2\left(1+\frac{x^2}{e^x}\right)}{1+\frac{\sin x}{x}+\boxed{\frac{\log_2 x}{x}}} .$$

ORA:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\log_2 x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \implies \lim_{x\to\infty} \log_2\left(1+\frac{x^2}{e^x}\right) = \log_2 1 = 0$$

per cui

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\log_2\left(1+\frac{x^2}{e^x}\right) = 0$$

Conclusione:

$$L = \frac{\log_2 e + 0}{1+0+0} = \log_2 e . \qquad \square$$

Esercizio Calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{2x} + |\sin x|^{x^2}}{\left(2^{x\log x} + e^x\right)^2} . \qquad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Soluzione: Conti:

$$N(x) = x^{2x} + |\sin x|^{x^2} = \left(x^{2x}\right)\left(1 + \frac{|\sin x|^{x^2}}{\quad}\right)$$

$$N(x) = x^{2x} + |\sin x|^{x^2} = x^{2x}\left(1 + \frac{|\sin x|^{x^2}}{x^{2x}}\right)$$

dove $\lim_{x\to\infty} \frac{|\sin x|^{x^2}}{x^{2x}} = 0$ funz. limitata x infinitesima.

$$D(x) = \left(2^{x\log x} + e^x\right)^2$$

Osservo che $2^{x\log x} > e^x$ definitivamente

Dunque

$$D(x) = \left(2^{x\log x}\right)^2 \left(1 + \frac{e^x}{2^{x\log x}}\right)^2$$

$$= 2^{2x\log x}\left(1 + \frac{e^x}{2^{x\log x}}\right)^2$$

$$\frac{e^x}{2^{x\log x}} \to 0$$

Provo che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2^{x\log x}} = 0 \quad \text{per confronto:}$$

$$\frac{e}{2^{\log x}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \implies \frac{e}{2^{\log x}} < \frac{1}{2} \quad \forall x \geq M$$

$$\Downarrow$$

$$0 < \boxed{\frac{e^x}{2^{x\log x}}} = \left(\frac{e}{2^{\log x}}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x}$$

$$0 \to 0, \qquad \frac{e^x}{2^{x\log x}} \to 0 \text{ per confronto}, \qquad \frac{1}{2^x} \to 0$$

In definitiva:

$$L = \lim_{x \to \infty} \boxed{\frac{x^{2x}}{2^{2x \log x}}} \cdot \frac{1 + \frac{|\sin x|^{x^2}}{x^{2x}}}{\left(1 + \frac{e^x}{2^{x \log x}}\right)^2} \to 1$$

Voglio calcolare

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{2x}}{2^{2x \log x}} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{2^{\log x}}\right)^{2x} = ?$$

Ovvero voglio calcolare

$$M = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{2^{\log x}} \qquad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Conto:

$$\boxed{2^{\log x}} = 2^{\log\left(2^{\boxed{\log_2 x}}\right)} = 2^{(\log_2 x) \cdot \log 2} =$$

$$= \left(2^{\log_2 x}\right)^{\log 2} = \boxed{x^{\log 2}}$$

$$M = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^{\log 2}} = \lim_{x \to \infty} x^{(1 - \log 2)} = +\infty$$

perché $1 - \log 2 > 0$
$\Updownarrow$
$\log 2 < 1$

Infatti $\log 2 < \log e = 1$.

Deduco che

$$L = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x^{\log 2}}\right)^{2x} \cdot \frac{1 + \text{infinitesimo}}{(1 + \text{infinitesimo})^2} =$$

$$= +\infty. \qquad \square$$

Esercizio Al variare di $\alpha > 0$ calcolare il limite:

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x}) + e^{-1/x}}{x^\alpha} \, . \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

Soluzione. Se non si creano forme indeterminate $[\infty - \infty]$ sono oltre ue

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{x^\alpha} + \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^\alpha}$$

Primo limite: Sostituzione $\sqrt{x} = y \iff x = y^2$ e

$$x \to 0^+ \iff y \to 0^+$$

Trasformo

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x^\alpha} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\sin(y)}{y^{2\alpha}} =$$

$$= \lim_{y \to 0^+} \boxed{\frac{1}{y^{2\alpha - 1}}} \cdot \underbrace{\frac{\sin y}{y}}_{\to 1} = \begin{cases} +\infty & 2\alpha - 1 > 0 \\ 1 & 2\alpha - 1 = 0 \\ 0 \quad \alpha < 1/2 & 2\alpha - 1 < 0 \end{cases}$$

Secondo limite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^\alpha} = \lim_{y \to +\infty} \frac{e^{-y}}{\left(\frac{1}{y}\right)^\alpha} = \lim_{y \to \infty} \frac{y^\alpha}{e^y} = 0$$

$\forall \alpha > 0$

Sostituzione $\frac{1}{x} = y \iff \frac{1}{y} = x$

$$x \to 0^+ \iff y \to +\infty$$

Conclusione

$$L = \begin{cases} 0 & \text{se } 2\alpha - 1 < 0, & \alpha < 1/2 \\ 1 & \text{se } 2\alpha - 1 = 0 & \alpha = 1/2 \\ +\infty & \text{se } 2\alpha - 1 > 0. & \alpha > 1/2 \end{cases}$$

$\square$

Analisi locale delle funzioni

Def. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme e sia $0 \in \mathbb{R}$ un suo punto di accumulazione. Sia poi $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione.

(1) Diciamo che f è infinitesima per $x \to 0$ se

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Scriveremo in questo caso

$$f(x) = o(1) \quad \text{per } x \to 0$$

(" f è un o piccolo di x per $x \to 0$ ").

(2) Diciamo che f ha ordine di infinitesimo $n \in \mathbb{N}$ per $x \to 0$ se esiste finito e $\neq 0$ il seguente limite

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} \neq 0$$

(3) Sia $n \in \mathbb{N}$. Diciamo $f(x) = o(x^n)$ per $x \to 0$ (" f è un o piccolo di x^n per $x \to 0$ ") se:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

(4) Siano infine $f, g : A \to \mathbb{R}$. Diciamo che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to 0$ se:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 .$$

Notazione

(1) $o(1)$ indica una generica (non meglio precisata) funzione che tende a 0 per $x \to 0$

(2) $o(x^n)$ indica una generica (non meglio precisata) funzione che tende a 0 per $x \to 0$ più velocemente di x^n.

Algebra degli "o piccoli"

Teorema.