Lezione 22

giovedì 28 novembre 2013
14:13

Concludere
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\left(\log(n+1)-\log n\right)}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}}$$

$$N = \frac{1}{n}\left(1+o(1)\right)\frac{1}{n}\left(1+o(1)\right) \qquad o(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(1+o(1)\right)$$

$$D = n^{1/4}\left(\frac{1}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n^{1/4-1}\left(\frac{1}{4}+o(1)\right)$$

$$= n^{-3/4}\left(\frac{1}{4}+o(1)\right)$$

Quoziente

$$a_n = \frac{N}{D} = \frac{\frac{1}{n^2}\left(1+o(1)\right)}{n^{-3/4}\left(1/4+o(1)\right)} = \boxed{\frac{1}{n^{5/4}}}\left(4+o(1)\right) \qquad n\to\infty$$

Con il criterio del confronto asintotico:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{5/4}}} = \lim_{n\to\infty}\left(4+o(1)\right) = 4 \neq 0 \text{ finito}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ conv.} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}} \text{ converge}$$

perché $\alpha = 5/4 > 1$

La serie data CONVERGE. $\square$

Esercizio Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che

converga la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left| \sinh\left(\frac{1}{n}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \right|$$

Sol. Serie con termine generale ≥ 0. Uso Confr. Asint.

Sviluppi

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \qquad x \to 0$$

$$\sinh\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \qquad n \to \infty$$

Poi

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad x \to 0$$

Siccome $\frac{1}{n^\alpha} \to 0$ per $n \to \infty$ trovo:

$$\log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{2\alpha}} + \frac{1}{3}\frac{1}{n^{3\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)$$

$$n \to \infty$$

Metto insieme:

$$a_n = \sqrt{n} \left| \sinh\left(\frac{1}{n}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \right|$$

$$= n^{1/2} \left| \frac{1}{n} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) - \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^{2\alpha}} - \frac{1}{3}\frac{1}{n^{3\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right) \right|$$

Caso $\boxed{\alpha = 1}$. Trovo:

$$a_n = n^{1/2} \left| \frac{1}{\ } \frac{1}{\ } + o\left(\frac{1}{\ }\right) + \frac{1}{\ }\frac{1}{\ } - \frac{1}{\ }\frac{1}{\ } + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right|$$

$$a_n = n^{1/2}\left| \frac{1}{6}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right|$$

$$= n^{1/2}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|$$

$$= n^{1/2}\left|\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)\right|$$

$$= \frac{1}{n^{2-1/2}}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) = \frac{1}{n^{3/2}}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)$$

Siccome

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) = \frac{1}{2} \neq 0$$

allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ conv.} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \text{ conv.}$$

$$\frac{\text{CONV.}}{\text{Sì}}$$

Per C.A.

Sì perché $3/2 > 1$

• CASO $0 < \alpha < 1$. In questo caso:

$$a_n = \sqrt{n}\cdot|\ldots| = \sqrt{n}\left|-\frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right|$$

$$= \sqrt{n}\left(\frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$$

$$= n^{1/2}\frac{1}{n^\alpha}\left(1 + o(1)\right) = \boxed{\frac{1}{n^{\alpha-1/2}}}\left(1 + o(1)\right)$$

Mi domando se:

$$\alpha - \frac{1}{2} > 1 \iff \alpha > \frac{3}{2} \quad \underline{\underline{\text{NO}}}$$ perché $\alpha < 1$ in questo caso

Quindi siccome $\alpha - 1/2 \leq 1$ allora la serie diverge per il C. C.A.

- Rimane: $\alpha > 1$. In questo caso:

$$a_n = \sqrt{n}\left|\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right| = n^{1/2} \cdot \frac{1}{n}(1 + o(1))$$

$$= \boxed{\frac{1}{n^{1/2}}}(1 + o(1))$$

Siccome

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = \infty \quad \overset{\text{C. A.}}{\Longrightarrow} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \text{ diverge.}$$

perché $1/2 \leq 1$

CONCLUSIONE: serie converge $\iff \alpha = 1$

<u>Forme indeterminate del tipo $[1^\infty]$.</u>

<u>Esercizio</u> Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}.$$

Procedo così:

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}} = e^{\frac{1}{x^2}\log(\cos x)}$$

Sviluppo il logaritmo:

$$\log(1+x) = x + o(x) \qquad x \to 0$$

Siccome $\cos x - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ allora posso usare la Reg. di Sost.

$$\log(\cos x) = \log\left(1 + \underline{\cos x - 1}\right)$$

$$= \cos x - 1 + o(\cos x - 1)$$

$$= (\cos x - 1)(1 + o(1)) \qquad x \to 0$$

Poi

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\log \cos x = x^2\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right)(1 + o(1))$$

$$= x^2\left(-1/2 + o(1)\right)$$

E infine:

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\log \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\cancel{x^2}(-1/2 + o(1))}{\cancel{x^2}}} = e^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{e^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$\square$

Osservazione

$$\ldots^{\frac{1}{x^2}} \qquad \ldots^{\frac{1}{x^2}} \qquad \left(\ldots\frac{1}{\ldots}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{x^2}} = \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\cos x - 1}}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\cos x - 1}}\right)^{\frac{1}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2}}$$

$\frac{\cos x - 1}{x^2} \to -1/2$ sviluppi

$$\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\cos x - 1}}\right)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \xrightarrow{x \to 0} e$$

$$\xrightarrow[x \to 0]{} e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Asintoti obliqui

<u>DEF</u> Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. La retta di equazione $y = mx + q$, con $m, q \in \mathbb{R}$, si dice asintoto di f destro $(a +\infty)$ se

$$\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - (mx + q) \right) = 0$$

Analog. la retta $y = mx + q$ si dice asintoto sinistro $(a -\infty)$ di f se

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - (mx + q) \right) = 0.$$

Calcolo di asintoti

Come primo passo cerco $m \in \mathbb{R}$ limite:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Se trovo $m \in \mathbb{R}$ cerco $q \in \mathbb{R}$ in questo modo:

$$q = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - mx \right)$$

Se trovo anche q allora la retta $y = mx + q$ è asintoto a $+\infty$ di f.

<u>Esercizio</u> Calcolare gli asintoti a $\pm\infty$ della funzione

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}.$$

Soluz. Il dominio di f è dato dalla cond. $x^2 + x \geq 0$ ovvero $x(x+1) \geq 0 \iff x \leq -1$ oppure $x \geq 0$

$$D(f) = (-\infty, -1] \cup [0, \infty).$$

Cerco asintoto a $+\infty$:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x} \left(1 + \sqrt{1 + 1/x} \right)}{\cancel{x}} = 1 + 1 = 2$$

Cerco q:

$$q = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx = \lim_{x \to \infty} x + \sqrt{x^2 + x} - 2x$$

$$= \lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2} + x - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 + 1/x} + 1 \right)} = \frac{1}{2}$$

Dunque $y = 2x + \frac{1}{2}$ è Asintoto obliquo a $+\infty$.

Cerchiamo un asintoto a $-\infty$: Cerco m:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2+x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2}\sqrt{(1+1/x)}}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x - x\sqrt{1+1/x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \sqrt{1+1/x}\right) = 0$$

Forse c'è asintoto orizzontale. Cerco q:

$$q = \lim_{x \to -\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x + \sqrt{x^2+x}$$

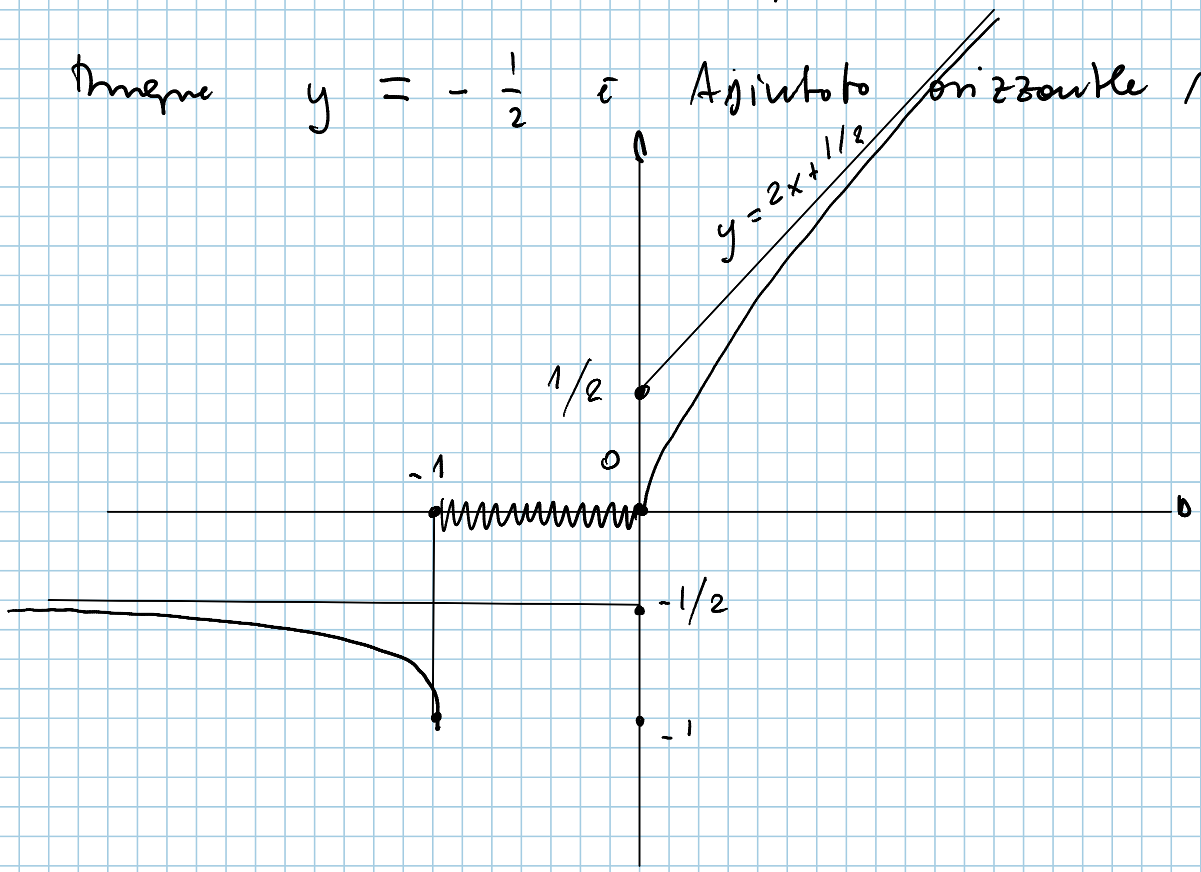
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2} - (\cancel{x^2} + x)}{x - \sqrt{x^2+x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x - \sqrt{x^2+x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x + x\sqrt{1+1/x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{1 + \sqrt{1+1/x}} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\quad}{x + x\sqrt{1+1/x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\quad}{1+\sqrt{1+1/x}} = -\frac{\quad}{2}$$

Dunque $y = -\frac{1}{2}$ è Asintoto orizzontale sinistro.



CAPITOLO : Funzioni Continue

Def (Limiti destro e sinistro) $A \subset \mathbb{R}$ insieme, $x_0 \in \mathbb{R}$ p.to accumulazione, $f: A \to \mathbb{R}$.

1) Diciamo che

$$L = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \quad , \quad L \in \mathbb{R},$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tale che: } x \in A \cap (x_0, x_0+\delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

2) Diciamo che

$$L = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c.: } x \in A \cap (x_0-\delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

DEF (Funz. Cont.) Siano $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, e $f: A \to \mathbb{R}$.

(1) Diciamo che f è continua nel punto x_0 se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } : x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(2) Diciamo che f è cont. su A se è cont. in ogni punto di A.

TEOREMA $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$ funzione.

Le seguenti 4 affermazioni sono fra loro equivalenti:

(1) f è cont. nel punto x_0;

(2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (esiste il limite e ...)

(3) Esistono uguali i limiti destro e sinistro e inoltre

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

(4) Per ogni successione di punti $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_n \in A$ e $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$ si ha:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Prova Omessa.

Commento Il punto 4) dice che se f è cont. in x_0 e $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$ allora:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right)$$

Ovvero: il limite passa dentro l'argomento delle funzioni cont. $\square$