Lezione 25

giovedì 5 dicembre 2013

14:22

3) Verifichiamo che $D\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{-Dg(x)}{g(x)^2}$.

$$D\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)}$$

$$= -\lim_{h\to 0} \boxed{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}} \cdot \frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)}$$

$$= -Dg(x) \cdot \frac{1}{g(x)^2} = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}.$$

$\square$

Derivata della funzio composta e della funzione inversa

TEOR. 1 Sia $f: A \to B$ una funzione derivabile in $x_0 \in A$, e sia poi $g: B \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $y_0 = f(x_0) \in B$. Allora la funzione composta $g\circ f: A \to \mathbb{R}$ è derivabile nel punto x_0 e inoltre:

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Dim. Funzione ausiliaria $h: B \to \mathbb{R}$

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} & y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) & y = f(x_0) \end{cases} \qquad y \in B$$

Chiaramente h è cont. nel punto $y_0 = f(x_0)$, in quanto g è derivabile in quel punto.

Prendo $x \neq x_0$:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= h(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$h(f(x)) \xrightarrow{x \to x_0} h(f(x_0)) = g'(f(x_0))$

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \to x_0} f'(x_0)$

$h \circ f$ è cont. nel punto x_0

Conclusione

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

$\square$

Esempio 1

$$D \log\left(\boxed{\log(1+x^2)}\right) = \frac{1}{\log(1+x^2)} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x.$$

è definita $\forall x \neq 0$

Esempio 2 Voglio provare che $D\, x^{\alpha} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$, $x > 0$.

Infatti

$$D x^{\alpha} = D\, e^{\log x^{\alpha}} = D\, e^{\alpha \cdot \log x} =$$

$$= e^{\boxed{\alpha}\log x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \alpha \cdot x^{-1} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}.$$

TEOR. 2 Sia $f : A = [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva e derivabile nell'intervallo $A = [a,b]$.

Supponiamo inoltre che $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in A$.
Allora la funzione inversa $f^{-1} : f(A) \to A$
è derivabile in ogni punto $y = f(x) \in f(A)$ ed
inoltre:

$$D f^{-1}(y) = \frac{1}{D f(x)} \quad \text{dove} \quad y = f(x).$$

Dim: Fisso $y_0 = f(x_0) \in f(A)$:

$$Df(y_0) = \boxed{\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \circledast$$

Sostituzione $x = f^{-1}(y)$ e quindi $x_0 = f^{-1}(y_0)$.
Ovvero $y = f(x)$ e $y_0 = f(x_0)$.
Se ora

È vero

$$y \to y_0 \implies \underset{\substack{\| \\ x}}{f^{-1}(y)} \to \underset{\substack{\| \\ x_0}}{f^{-1}(y_0)}$$

perché f^{-1} è continua in y_0.

$$\circledast = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{D f(x_0)} \qquad \square$$

<u>Esempio 1</u> Derivata dell'arcoseno. Affermo che:

$$D \arcsin(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad -1 < y < 1$$

Infatti, se $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{\sin x}$ $\left(x \in (-\pi/2, \pi/2) \right)$ allora

$$D \arcsin(y) = \frac{1}{D \sin(x)} = \frac{1}{\cos(x)} =$$

$$D \sin(x) \qquad \cos(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Esempio 2 $\qquad D \arccos(y) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad -1<y<1.$

Esempio 3 Derivata di arctg. Verifichiamo che

$$D \operatorname{arctg}(y) = \frac{1}{1+y^2}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Infatti, se $y = \operatorname{tg} x$ con $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ allora:

$$D \operatorname{arctg}(y) = \frac{1}{D \operatorname{tg}(x)} = \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = (*)$$

$$D \operatorname{tg}(x) = D \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(D \sin x)\cos x - \sin x \cdot D \cos x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(*) = \frac{1}{1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}. \qquad \square$$

Esercizio Determinare tutti i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

tali che la funzione $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}(\alpha+1)\arcsin x-6(\beta+3)\sin x & x\in(-1,0]\\ 2\alpha\,(x^4+x)-(\beta+3)(\sqrt{x}+\operatorname{tg}x) & x\in(0,1)\end{cases}$$

sia derivabile nel punto $x=0$.

Soluzione. Deve esistere finito il

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$$

Equivalentemente devono esistere finiti ed essere uguali i limiti destro e sinistro.

$$L^-=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{(\alpha+1)\arcsin x-6(\beta+3)\sin x}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}(\alpha+1)\frac{\arcsin x}{x}-6(\beta+3)\frac{\sin x}{x}=\boxed{(\alpha+1)-6(\beta+3)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}\underset{y=\arcsin x}{=}\lim_{y\to0}\frac{y}{\sin y}=1$$

$x=\sin y$

$x\to0\Rightarrow y\to0$

Poi

$$L^+=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\alpha(x^4+x)-(\beta+3)(\sqrt{x}+\operatorname{tg}x)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}2\alpha(x^3+1)-(\beta+3)\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}+\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to1}\cdot\frac{1}{\cos x}\Big)$$

se $\beta+3\neq0$ L^+ NON esiste finito.

Deve essere $\beta=-3$. In questo caso:

$$L^+ = 2\alpha$$

$$L^- = \alpha + 1$$

Devo infine richiedere $L^- = L^+ \iff \alpha + 1 = 2\alpha$

$\iff \underline{\underline{\alpha = 1}}$

Risposta: $\alpha = 1$ e $\beta = -3$.

$\square$

Punti critici e punti di estremo locale

DEF Siano $A \subset \mathbb{R}$ un insieme ed $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione.

(1) Un p.to $x_0 \in A$ si dice <u>punto di minimo locale per f</u> se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in A \cap I_\delta(x_0)$ (ovvero $\forall x \in A$ tale che $|x - x_0| < \delta$).

Diremo che x_0 è p.to di min. locale <u>stretto</u> se $f(x_0) < f(x)$ $\forall x \in A \cap I_\delta(x_0)$, $x \neq x_0$.

(2) Un p.to $x_0 \in A$ si dice punto di max locale per f se $\exists\, \delta > 0$ t.c. $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in A \cap I_\delta(x_0)$.

Diremo poi che ... stretto ... se $f(x_0) > f(x)$.

(3) Un p.to $x_0 \in A$ si dice p.to di estremo locale per f se è un p.to di min oppure max locale.

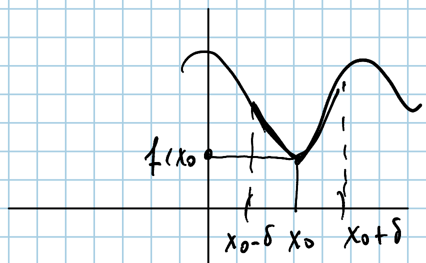
<u>**DEF** (Punto critico \ stazionario)</u> Sia $A = (a, b) \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto e sia $f: A = (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su A. Un p.to $x_0 \in A$ si dice p.to critico di f se $f'(x_0) = 0$.

<u>**TEOREMA**</u> Sia $A \subset \mathbb{R}$ un intervallo <u>aperto</u> e sia

$f: A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in A. Se $x_0 \in A$ è un p.to di estremo locale per f allora è un p.to critico di f.

DIM. Ad es. sia $x_0 \in A$ un p.to di minimo locale:

$$\exists\, \delta > 0 \text{ tale che } \quad f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A \cap I_\delta(x_0)$$



Dunque

$$\left.\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0^+} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{> 0}} \geq 0 \\ f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0^-} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{< 0}} \leq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

$\square$

Osservazione

Dunque:

Punto di estremo locale (interno) $\Rightarrow$ Punto critico

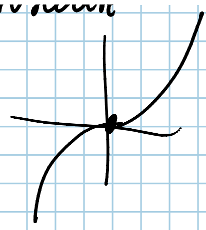
MA

Punto critico $\not\Rightarrow$ P.to estremo locale

Ad esempio $f(x) = x^3$ è strettamente crescente (e quindi non ha p.ti di estremo locale).

Per esempio $f(x) = x^3$ è monotona crescente

(e quindi non ha p.ti di estremo locale).



E tuttavia $f'(x) = 3x^2$

$f'(0) = 0$ ovv. $x = 0$

p.to critico $\square$