Lezione 26

venerdì 6 dicembre 2013
10:13

CALENDARIO LEZIONI :

ANCORA 2 SETTIMANE A DICEMBRE

+ 1 SETTIMANA CIRCA A GENNAIO DOPO LE VACANZE.

Lunedì prox. : R.M.

Programma : • Teor. Weierstrass Rolle Cauchy Lagrange ← OGGI

- $f'(x) \geq 0 \iff f$ crescente
- Hospital
- Sviluppi di Taylor
- Integrali
- Integrali impropri
- Convessità

Teorema di Weierstrass

TEOR. Sia $f: A = [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Allora esistono $x_0, x_1 \in [a,b]$ tali che

$$f(x_0) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{e} \quad f(x_1) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

Preparazione

Una selezione crescente di indici è una successione $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tale che :

- $n_k \in \mathbb{N} \quad \forall k$
- $n_{k+1} > n_k$ ($k \mapsto n_k$ è strett. crescente).

D Data una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{R}}$ di numeri reali, una successione del tipo $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ con n_k selezione crescente di indici si chiama <u>sottosuccessione di $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$</u>

<u>TEOR</u> (della sottosuccessione convergente) Ogni successione limitata possiede una sottosuccessione convergente.

Dim. Omessa.

Dim del Teorema di Weierstrass. Proviamo che esiste $x_0 \in [a,b]$ punto di minimo di f.

Esiste sempre

$$L = \inf_{x \in A = [a,b]} f(x) \qquad L = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

1° caso $L = -\infty$

2° caso $L \in \mathbb{R}$

1° Caso. Esiste una successione di punti $x_n \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) = -\infty$$

2° Caso. Esiste una succ. di punti $x_n \in [a,b]$ t.c.

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L \in \mathbb{R}.$$

La succ. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata. Quindi lei possiede una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente:

$$\lim x_n = x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{MA} \quad x_0 \in [a,b]$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{MA} \quad x_0 \in [a,b]$$

$$\Uparrow$$

$$x_{n_k} \in [a,b] \quad \forall k \quad \text{chiuso}$$

Ovviamente

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Per ipotesi f è cont. in $x_0 \in A = [a,b]$.

Dunque

$$\underset{\substack{\Uparrow \\ \mathbb{R}}}{f(x_0)} = f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) \overset{\text{cont.}}{=} \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = L$$

Dunque $L \neq -\infty$ e di più

$$f(x_0) = L = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_0) = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

D

Analog per x_1 p.to di max.

<u>Teorema (Rolle)</u> Sia $f: A = [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su A e derivabile su (a,b). Se $f(a) = f(b)$ allora esiste almeno un punto $x \in (a,b)$ tale che $f'(x) = 0$.

(chiuso e limitato)

Dim. Per il T. Weierstrass esistono $x_0, x_1 \in [a,b]$ tali che

$$f(x_0) = \min_{x\in[a,b]} f(x) \qquad f(x_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

1° caso: $x_0, x_1 \in \{a, b\}$. Siccome $f(a) = f(b)$ allora

$$\min_A f = \max_A f \implies f \text{ è costante su } A \implies f'(x) = 0 \quad \forall x$$

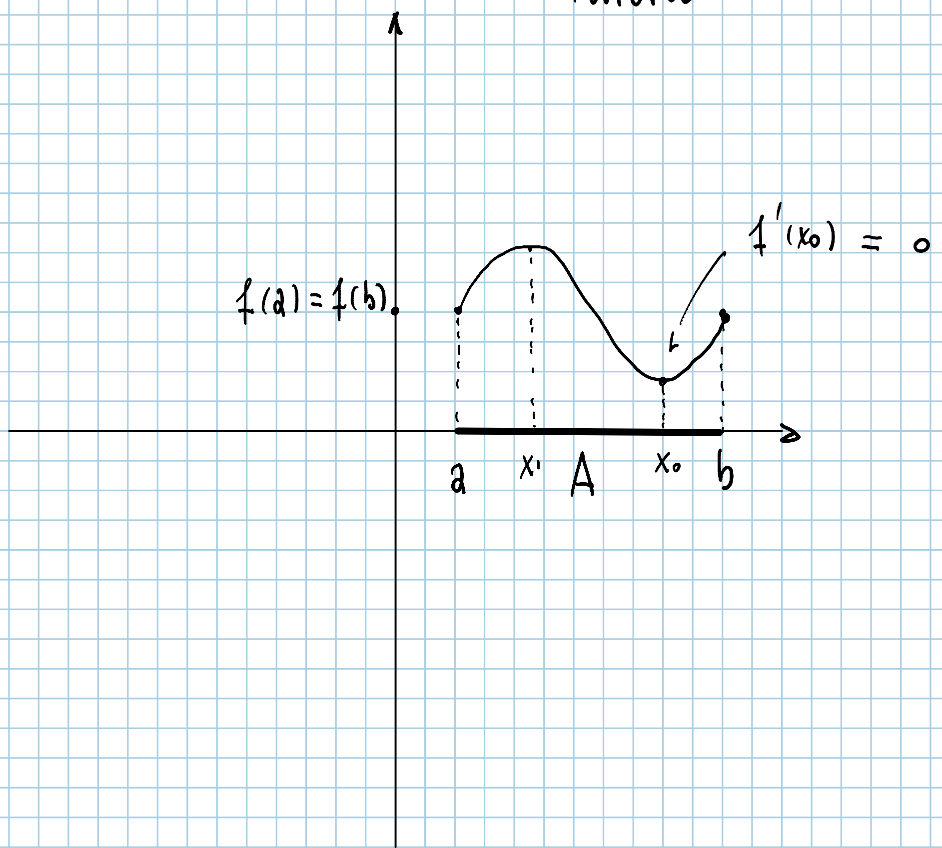
2° caso. Almeno uno dei due punti x_0, x_1 è un punto interno (cioè è contenuto in (a,b)).
Ad es. $x_0 \in (a,b)$
Ma allora

$x_0 \in (a,b)$
punto di estremo interno
f derivabile in x_0

$\implies f'(x_0) = 0$

Teorema del punto critico interno

□



<u>Teorema (Lagrange)</u> Sia $f: A = [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $A = [a,b]$ derivabile su (a,b). Allora esiste almeno un p.to $x \in (a,b)$ tale che

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x)}$$

$$\frac{\qquad}{b-a} = f'(x)$$

Dim. Introduciamo la funzione ausiliaria $h : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$h(x) = x\,(f(b) - f(a)) - f(x)\,(b-a)$$

h è cont. in $[a,b]$, deriv. in (a,b)

- $h(a) = a\,(f(b) - f(a)) - f(a)\,(b-a) = a\,f(b) - b\,f(a)$
- $h(b) = b\,(f(b) - f(a)) - f(b)\,(b-a)$

$$= -b\,f(a) + f(b)\cdot a$$

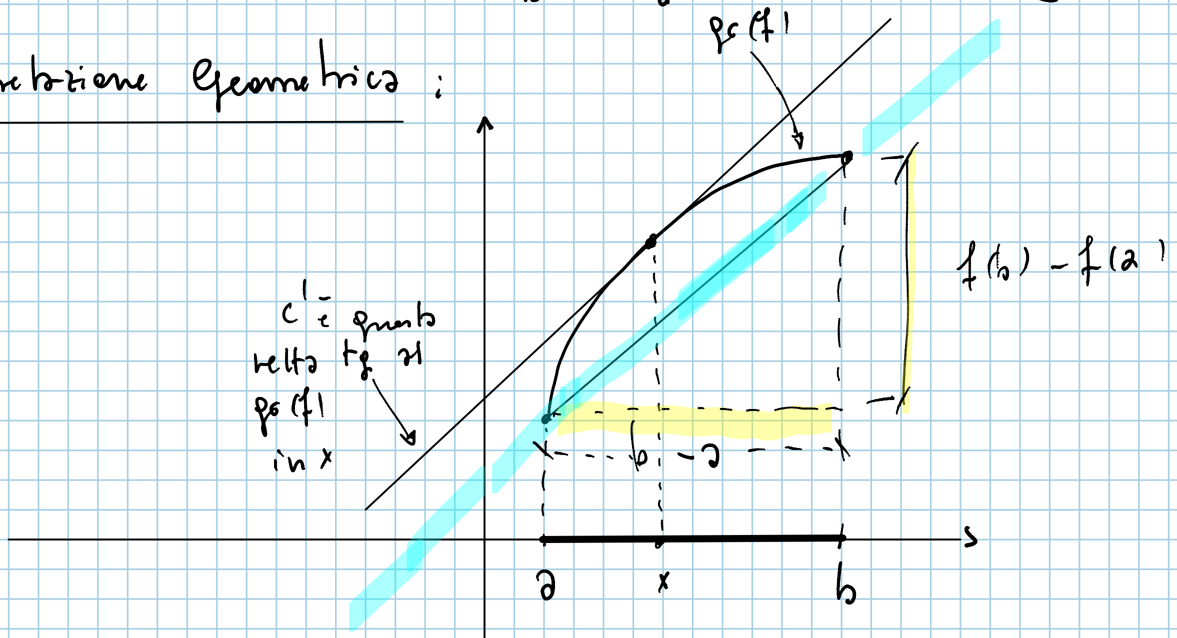
Siccome $h(a) = h(b)$ esiste per Rolle $x \in (a,b)$ tale che

$$0 = h'(x) = (f(b) - f(a)) - f'(x)\,(b-a)$$

e trovo

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \qquad \square$$

Interpretazione geometrica:



intervallo

Corollario: Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$. Allora f è costante.

Dim. Presi $x_1, x_2 \in (a,b)$ esiste $x \in (x_1, x_2)$ per Lagr. tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{f'(x)} \cdot (x_2 - x_1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 . \qquad \square$$

ES 1 Provare che $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ è costante nel suo dominio $[-1,1]$. Calcolare la costante.

ES 2 Provare che la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad x \neq 0$$

è costante in ciascuna delle due semirette $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$. Calcolare le due costanti.

Teorema (Cauchy) Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue su $[a,b]$ e derivabili su (a,b). Supponiamo inoltre che $g(b) \neq g(a)$. Allora esiste $x \in (a,b)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Dim. Funz. ausiliaria

$$h(x) = g(x)\left(f(b) - f(a)\right) - f(x)\left(g(b) - g(a)\right)$$

$$h(a) = \cancel{g(a)}\left(f(b) - \cancel{f(a)}\right) - \cancel{f(a)}\left(g(b) - \cancel{g(a)}\right)$$

$$= g(a) f(b) - f(a) g(b)$$

$$h(b) = g(b)\left(f(b) - f(a)\right) - f(b)\left(g(b) - g(a)\right)$$

$$h(b) = \cancel{g(b)f(b)} - g(b)f(a) - \cancel{f(b)g(b)} + f(b)g(a)$$

$$= -g(b)f(a) + f(b)g(a)$$

$$h(a) = h(b) \overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists\, x \in (a,b) : h'(x) = 0$$

Ovvero:

$$0 = h'(x) = g'(x)(f(b) - f(a)) - f'(x)(g(b) - g(a))$$

Trovo:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \qquad \square$$

Derivata e Monotonia

TEOR Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile.
Allora: INTERVALLI

(1) f crescente su $(a,b) \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

(2) Se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$ allora f è strett. crescente su (a,b).

Dim (1)
Supp f crescente. Allora $f(x+h) \geq f(x) \quad \forall h \geq 0$
Dunque per $h > 0$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\geq 0 \ \forall h > 0} \geq 0 \qquad (\forall x \in (a,b))$$

Supp ora che $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$. Dimostro che f è crescente. Siano $x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$

Per Lagrange esiste $x \in (x_1, x_2)$ tale che:

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{\boxed{f'(x)}}_{\geq 0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \geq 0$$

ovvero $f(x_2) \geq f(x_1)$.

(2) Analogo. ES. $f'(x) > 0$

□

<u>Esercizio</u> Sia data la funzione

$$f(x) = (x^2 + 2x - 3)\, e^{x^2+2x}, \qquad x \in [-1, 1].$$

Calcolare i punti di massimo e minimo (assoluti e relativi) di f su $[-1, 1]$.

Sol. f è cont. $[-1, 1]$ chiuso e limit. $\overset{TW}{\Longrightarrow}$ $\exists$ max f e min f

Procedo così:
- Calcolo derivata
- Studio $f'(x) \geq 0$ $\to$ intervalli monotonia
- Tramite $f'(x) = 0$ $\to$ p.ti critici
- Studio ev. p.ti estremo locale
- Identifico i p.ti di min / max assoluto.

(Se f avesse p.ti di <u>NON</u> derivabilità, questi devono essere studiati a parte).