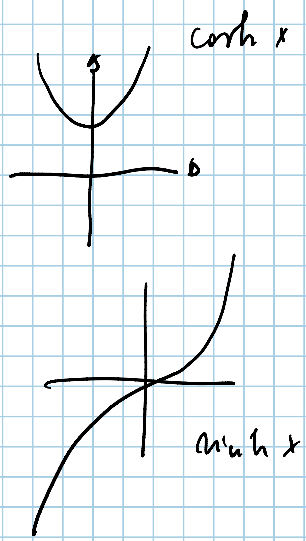
Lezione 28

mercoledì 11 dicembre 2013
14:07

- $f(x) = \log(\cosh x) - \log|\sinh x - 1|$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\log(1+\sqrt{2})\}$ $\qquad \log(1+\sqrt{2}) > 0$

$f(x) > 0 \iff x > 0$



Limiti

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \log\left(\frac{\cosh x}{|\sinh x - 1|}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \log\left(\frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}{\left|\frac{e^x - e^{-x}}{2} - 1\right|}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \log\left(\frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}{1 - \frac{e^x - e^{-x}}{2}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \log\left(\frac{\cancel{e^{-x}}\,(e^{2x} + 1)/2}{\cancel{e^{-x}}\,\left(e^{x} - (e^{2x} - 1)/2\right)}\right)$$

$$= \log\left(\frac{1/2}{1/2}\right) = \log(1) = 0$$

$$\lim_{x \to \log(1+\sqrt{2})} f(x) = +\infty$$

$$\lim f(x) \;=\; \underset{\text{omessi}}{\ldots} \;=\; \log(1) = 0$$

$x \to +\infty$

Asintoti

- La retta di eq. $x = \log(1+\sqrt{2})$ è un asintoto verticale destro e sinistro
- $y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.

Cont. e derivabilità f è cont. e der. in tutto $D(f)$ in quanto diff. e composizione di funz. cont. \ deriv.

Derivata:

$$f'(x) = D\left(\log(\cosh x) - \log(|\sinh x - 1|)\right)$$

$$= \frac{\sinh x}{\cosh x} - \frac{\cosh x}{\sinh x - 1}$$

$$= \frac{\sinh^2 x - \sinh x - \cosh^2 x}{\cosh x\,(\sinh x - 1)} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \forall x$$

$$= \frac{-1 - \sinh x}{\cosh x\,(\sinh x - 1)}.$$

Segno di $f'(x)$ Studio $f'(x) > 0$.

- $\cosh x \geq 1 > 0 \quad \forall x$
- $\sinh x - 1 > 0 \iff \sinh x > 1$
  $\iff x > \log(1+\sqrt{2})$
- $-1 - \sinh x > 0 \iff \sinh x < -1$

• $-1-\sinh x > 0 \iff \sinh x < -1$

$\iff \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} < -1$

$\iff e^x - e^{-x} < -2$ Moltiplico per e^x

$\iff e^{2x} + 2e^x - 1 < 0$ ⊛

$t = e^x > 0$ ritrovo

$t^2 + 2t - 1 < 0$ $\qquad t_\pm = -1 \pm \sqrt{2}$

$\Updownarrow$

$-1-\sqrt{2} = t_- < t < t_+ = \sqrt{2} - 1$

Nella x trovo la condizione equiv.

⊛ $\iff e^x = t < \sqrt{2} - 1$

$\iff x < \log(\sqrt{2}-1) < 0$ negativo

TABELLA

		$\log(\sqrt{2}-1)$	0	$\log(1+\sqrt{2})$	
$\cosh x$	$+++$		$+++$		$+++$
$\sinh x - 1$	$---$		$---$	$\times$	$+++$
$-1-\sinh x$	$+++$	0	$---$		$---$
$f'(x)$	$---$		$+++$		$---$
$f(x)$	$\downarrow$	0 p.to critico	$\uparrow$		$\downarrow$

Monotonia

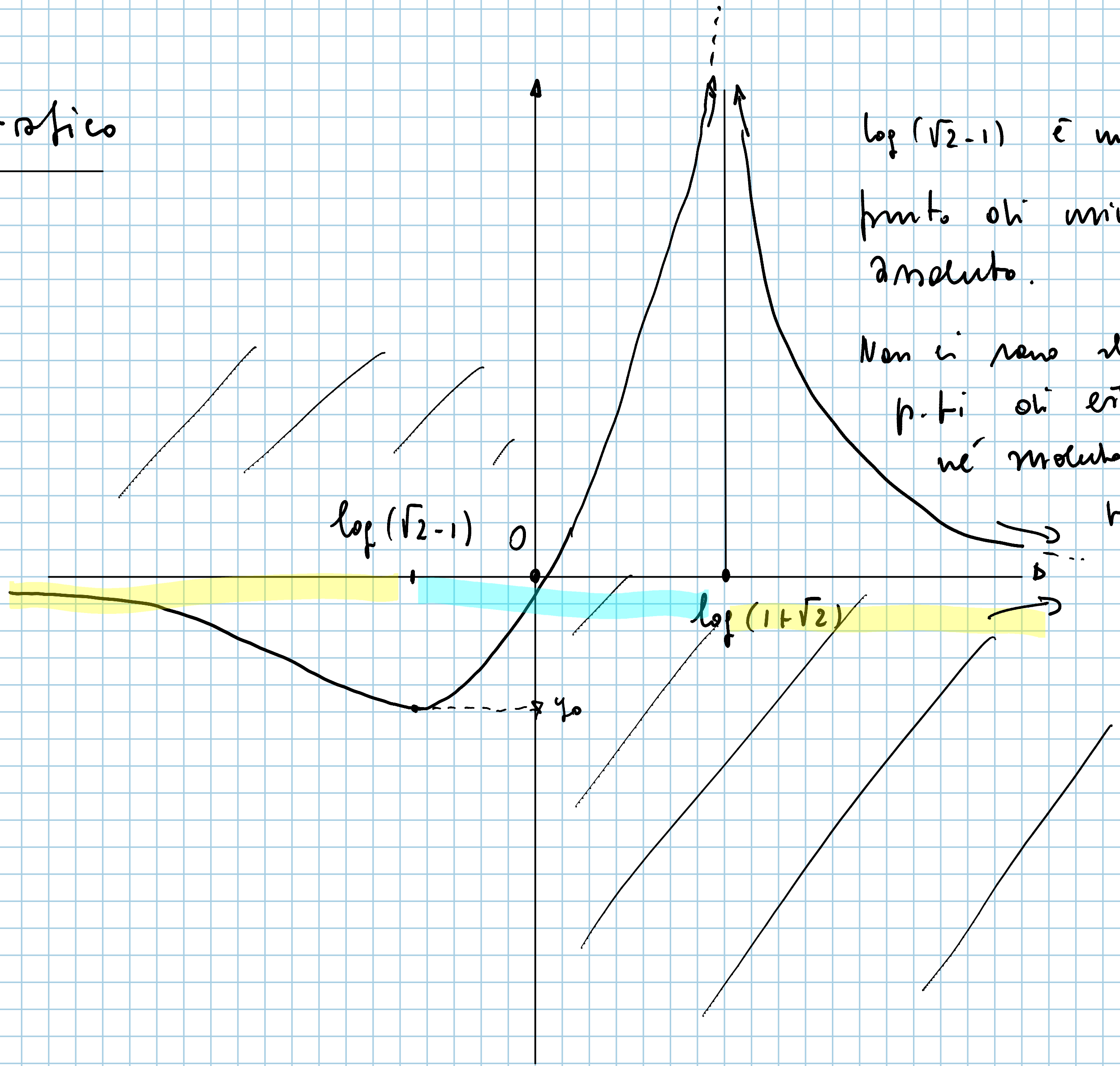
f decresce $(-\infty, \log(\sqrt{2}-1)]$

f cresce $[\log(\sqrt{2}-1), \log(1+\sqrt{2}))$

f decresce $(\log(1+\sqrt{2}), +\infty)$

Punti di estremo

Grafico



$\log(\sqrt{2}-1)$ è un punto di minimo assoluto.

Non ci sono altri p.ti di estremo né assoluto né relativo.

Esercizio Verificare che

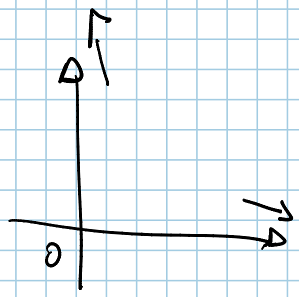
$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1} \quad \text{per ogni } x>0 .$$

Soluzione. Consideriamo

$$f(x) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}, \qquad x>0$$

Vorrei dire che $f(x) > 0 \quad \forall x>0$.

Vorrei dire che $f(x) > 0 \quad \forall x > 0$.



Limiti

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$$

Derivata:

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + 1/x} - \frac{-1}{(x+1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{\underline{\underline{x}}(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-(x+1) + x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0 \quad \forall x > 0$$

Dunque f è strett. decrescente nel intervallo $(0, +\infty)$

$$f(x) > f(y) \quad \forall y > x$$

e dunque

$$f(x) > \lim_{y \to \infty} f(y) = 0 \quad \forall x > 0, \quad \square$$

2

Esercizio Verificare che la funzione

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \text{con } x > 0$$

è strettamente crescente.

Soluzione. Verifichiamo che $f'(x) > 0 \quad \forall x > 0$.
Calcoliamo

$$D f(x) = D\, e^{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}$$

$$= D\, e^{x \cdot \log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= e^{x \cdot \log\left(1+\frac{1}{x}\right)} \cdot \left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} \right]$$

$$= \underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}_{>0} \cdot \underbrace{\left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right]}_{>0}$$

per l'esercizio precedente

Dunque:

$$f'(x) > 0 \quad \forall x > 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ è strett. crescente.}$$

$\square$

Teoremi di Hospital

TEOR. Siano $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in [a,b]$ e siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue su $[a,b]$, derivabili in $[a,b] \setminus \{x_0\}$ tali che $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Se esiste finito il limite

$$L = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

allora esiste anche il seguente limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

(Altre ipotesi $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$).

Dim. Basta provare che, data una successione di punti $x_n \in [a,b] \setminus \{x_0\}$ tali che $x_n \to x_0$ per $n \to +\infty$, allora si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L.$$

Infatti per il Teorema di Cauchy esiste $\bar{x}_n \in [x_0, x_n]$ tale che:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n)-f(x_0)}{g(x_n)-g(x_0)} \overset{\text{Teor. Cauchy}}{=} \frac{f'(\bar{x}_n)}{g'(\bar{x}_n)}$$

Siccome $\bar{x}_n$ è fra x_0 e x_n e $x_n \xrightarrow[\text{per } n\to\infty]{} x_0$, allora deve anche essere $\bar{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$.

Ma allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\bar{x}_n)}{g'(\bar{x}_n)} \overset{\text{Ipotesi}}{=} L.$$

E dunque

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \qquad \square$$

<u>TEOR. (Hospital 2)</u> Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili tali che:

i) $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = \infty$

ii) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

iii) Esiste (finito o infinito) il limite:

$$L = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Allora risulta anche

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L .$$

Dim. omessa

TEOR. (Hospital 3) Siano $f, g : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili tali che:

i) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty \quad (= 0)$

ii) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x$

iii) Esiste (finito o infinito) il limite

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Allora risulta anche

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L .$$

Dim. Omessa

Esercizio Verificare che

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0.$$

Soluzione. Devo verificare che

$$f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} = o(x^3) \quad \text{per } x \to 0$$

Ovvero:

Ovvero:

$$0 \overset{\cancel{\cdot}}{=} \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1 - x - x^2/2 - x^3/3!}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1 - x}{6x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{6} \overset{\text{sì}}{=} 0$$

Esercizio Per $\alpha > 0$ calcolare il limite:

$$L = \lim_{x\to0^+} \underbrace{x^\alpha}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\log x}_{-\infty} \overset{\text{sì}}{=} 0$$

Conto

$$L = \lim_{x\to0^+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha\, x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to0^+} \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{x}$$

$$= \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \cdot \lim_{x\to0^+} x^\alpha = 0$$