Lezione 29

giovedì 12 dicembre 2013
14:15

<u>Esercizio</u> Stabilire se la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & x \neq 0 \quad \circledast \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è derivabile nel punto $x = 0$.

Soluzione. Deve esistere finito il limite

$$f'(0) \overset{?}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \overset{0}{\overset{\parallel}{f(0)}}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{x} \overset{H}{=} \left[\frac{0}{0}\right]$$

A parte

$$\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{|x|}} = \left[e^{-\frac{1}{0^+}}\right] = \left[e^{-\infty}\right] = 0 = f(0)$$

Dunque f è cont. in $x = 0$.

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{|x|}} D\left(-\frac{1}{|x|}\right)}{1} = \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{|x|}} (-1) \frac{-\frac{x}{|x|}}{|x|^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|^3} e^{-\frac{1}{|x|}} =$$

$$\overset{x>0}{\parallel} \quad \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

Altro teorema

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

(per chiarire le idee)

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

Sì, esiste $f'(0) = 0$.

Sì, esiste $f'(0) = 0$.

Esercizio Verificare che $f(x) = e^{-1/|x|} = o(x^n)$ $x \to 0$.

Ovvero, verificare che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{x^n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Per induzione su n, usando Hospital. □

TEOREMA DI TAYLOR

$A = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$

DEF.

(1) $f \in C(A) \overset{\text{def.}}{\iff} f$ è continua su A

(2) $f \in C^1(A)$ "f è di classe C1 su A" $\overset{\text{def.}}{\iff} f'(x)$ esiste in ogni punto $x \in A$ ed inoltre $f' \in C(A)$

(3) $f \in C^2(A)$ "f è di classe C2 su A" $\iff f'(x)$ ed $f''(x)$ (derivata seconda di f) esistono $\forall x \in A$ e inoltre $f', f'' \in C(A)$

(4) $f \in C^K(A)$, $K \in \mathbb{N}$ "f è di classe C_K su A" $\iff f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), \dots, f^{(k)}(x)$ (derivata k-esima di f) esistono $\forall x \in A$ e inoltre $f', f'', \dots f^{(k)} \in C(A)$

(5) $f \in C^\infty(A)$ "f è di classe C infinito su A" $\iff f \in C^K(A)$ $\forall K \in \mathbb{N}$.

DEF (Polinomio di Taylor) Siano $A = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(A)$, e $x_0 \in A$. Il polinomio di Taylor di f di grado $n \in \mathbb{N}$ e punto base (centro) x_0 è:

$$P_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k .$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

□

TEOREMA (Taylor) Siano $f \in C^\infty(A)$, $x_0 \in A$ ed $n \in \mathbb{N}$.

Allora il Resto n-esimo

$$R_n(x, x_0) := f(x) - P_n(x, x_0)$$

verifica le seguenti proprietà. Per ogni $x \in A$ esiste $\xi \in (x_0, x)$ tale che

$$(*) \qquad R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} .$$

In particolare si ha

$$(**) \qquad R_n(x, x_0) = o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \to x_0 .$$

Commento

(1) La formula (*) si dice Resto in forma di Lagrange

(2) La formula (**) si dice Resto in forma di Peano

(3) Il Teorema di Taylor ci dice che

$$f(x) = P_n(x, x_0) + R_n(x, x_0)$$

Errore che verifica opportune stime

Dim. Funzioni ausiliarie:

$$G(x) = (x - x_0)^{n+1}$$

$$F(x) = R_n(x, x_0) = f(x) - P_n(x, x_0)$$

$$= f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$F(x) = R_n(x,x_0) = f(x) - P_n(x,x_0)$$
$$= f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Chiaramente $G \in C^\infty(\mathbb{R})$, $F \in C^\infty(A)$.

Poi
$$G^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{per ogni } k = 0, 1, \dots, n$$
$$G^{(n+1)}(x_0) = (n+1)!$$

Ora voglio calcolare:

$$F^{(k)}(x) = \left(f(x) - P_n(x,x_0)\right)^{(k)}$$
$$= f^{(k)}(x) - \sum_{h=0}^{n} \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!} \left[(x-x_0)^h\right]^{(k)}$$

Ora:
$$\left.\left[(x-x_0)^h\right]^{(k)}\right|_{x=x_0} = \begin{cases} h! = k! & k = h \\ 0 & k \neq h \end{cases}$$

Quindi
$$F^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - \frac{f^{(k)}(x_0)}{\cancel{k!}} \cdot \cancel{k!} = 0$$

VERO $\forall\ k = 0, 1, 2 \dots n$

Mentre se $k \geq n+1$: $F^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$

in particolare

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(k+1)}(x) \quad \forall x.$$

Dimostrazione. Parto da qui:

$$\boxed{\frac{F(x)}{G(x)}} = \frac{F(x) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{F(x_0)}}}{G(x) - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{G(x_0)}}} \overset{\text{Cauchy}}{\underset{\text{Esiste}}{=}} \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} =$$

$\xi_1 \in (x_0, x)$ tale che ..

$$= \frac{F'(\xi_1) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{F'(x_0)}}}{G'(\xi_1) - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{G'(x_0)}}} \overset{\text{Cauchy}}{\underset{\text{Esiste}}{=}} \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} =$$

$\xi_2 \in (x_0, \xi_1)$

$G'(\xi_1) - G'(x_0)$ Esiste $G''(\xi_2)$

Cauchy $\overset{\parallel}{0}$ $\xi_2 \in (x_0, \xi_1)$

$$= \dots = \underset{\text{Esiste}}{} \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{F^{(n)}(\xi_n) - \overset{0}{\cancel{F^{(n)}(x_0)}}}{G^{(n)}(\xi_n) - \underset{0}{\underset{\parallel}{G^{(n)}(x_0)}}} =$$

VERO per $G(x) = (x-x_0)^{n+1}$

$\xi_n \in (x_0, \xi_{n-1})$ tale che

$$= \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{G^{(n+1)}(\xi)} =$$

Per Cauchy: Esiste $\xi \in (x_0, \xi_n)$ ovvero $\xi \in (x_0, x)$ tale che

$$= \boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}$$

Ho scoperto:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \iff F(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} G(x)$$

$$R_n(x, x_0) = f(x) - P_n(x, x_0) = F(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Ho ottenuto la stima di Lagrange per il Resto n-esimo. □

APPLICAZIONI

(1) Sviluppo della funzione esponenziale.

$f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Fissiamo il punto base $x_0 = 0$.

Ovviamente $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e inoltre

$$f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall k$$

e quindi

$$f^{(k)}(0) = e^0 = 1 \quad \forall k$$

Deduciamo la formula: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$\xi \in (0, x)$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \boxed{\frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\boxed{\frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}}}_{o(x^n)}$$

(2) Sviluppo di $\sin(x) = f(x)$, $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$
p.to base $x_0 = 0$.

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & f(0) = \sin(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = \cos(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4)}(0) = 0 \end{array}$$

In generale:
$$f^{(2k)}(0) = 0$$
$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$$

Dunque

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{\left(D^{(2n+2)} \sin\right)(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

(3) Sviluppo del logaritmo. $f(x) = \log(1+x)$,
$A = (-1, \infty)$, $f \in C^{\infty}(A)$, $x_0 = 0$.

$$\begin{array}{ll} f(x) = \log(1+x) & f(0) = \log 1 = 0 \\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x} & f'(0) = 1 \end{array}$$