Lezione 30

venerdì 13 dicembre 2013
10:14

Logaritmo Sviluppo

$x_0 = 0$

$$f(x) = \log(1+x) \qquad f(0) = \log 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \qquad f'(0) = 1 = 0!$$

$$f''(x) = -(1+x)^{-2} \qquad f''(0) = -1!$$

$$f'''(x) = +2(1+x)^{-3} \qquad f'''(0) = 2!$$

$$f^{(4)}(x) = -2 \cdot 3 (1+x)^{-4} \qquad f^{(4)}(0) = -3!$$

$\dots$

In generale

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)!(1+x)^{-k} \qquad \forall x > -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!$$

Dunque

$$f(x) = \log(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overset{0 \text{ per } k=0}{\overset{/\!/}{f^{(k)}(0)}}}{k!} x^k + \underbrace{R_n(x,0)}_{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}}$$

con $\xi \in (0, x)$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!} x^k + \frac{(-1)^n n! (1+\xi)^{-(n+1)}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + \underbrace{\frac{(-1)^n (1+\xi)^{-(n+1)}}{n+1} x^{n+1}}_{o(x^n)} \qquad \xi \in (0, x).$$

Esercizio Calcolare il $\log(3/2)$ con un errore più piccolo di $1/100$.

Uso lo sviluppo di $\log(1+x)$ in $x_0 = 0$ con $x = 1/2$ $\left(\to 1+x = \frac{3}{2} \right)$

Il resto n-esimo (io dovrò scegliere n) è

$$\left| R_n(\underset{\substack{\| \\ 1/2}}{x}, 0) \right| = \left| \frac{(-1)^n (1+\xi)^{-(n+1)}}{(n+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right|$$

dove $\xi \in (0, 1/2)$. Stimo

$$\left| R_n(x,0) \right| \leq \frac{1}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \underset{\xi>0}{\leq} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Richiedo che $\qquad 1+\xi \geq 1$

$$\frac{1}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{100} \iff 100 < (n+1)\, 2^{n+1}$$

$$\| \quad n = 4$$

$$5 \cdot 32 = 160$$

Conclusione

$$\log \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \text{Errore}$$

con $|\text{Errore}| < \frac{1}{100}$.

Sviluppi in Serie di Taylor

DEF Sia $A = (a,b) \subset \mathbb{R}$ e sia $f \in C^\infty(A)$.
Si dice che f si sviluppa in serie di Taylor in A se per ogni punto base $x_0 \in A$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x, x_0) = 0 \quad \forall x \in A.$$

In questo caso la funzione f si può esprimere come serie di Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k , \qquad x \in A .$$

Esempio (Funzione esponenziale) Sviluppo nel punto base $x_0 = 0$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad e^{\xi} \le e^x$$

con $\xi \in (0, x)$.

Ora

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dunque per $n \to \infty$ trovo la serie di Taylor

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \qquad \forall x \in \mathbb{R} .$$

Esercizio Verificare che

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \qquad \forall x \in \mathbb{R} .$$

Formule di Eulero Partiamo da

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k , \qquad x \in \mathbb{R}$$

Allora

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (ix)^k \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$k=0 \quad n!$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} i^k x^k$$

Separo indici pari da dispari

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} i^{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} i^{2n+1} x^{2n+1} =$$

$$i^{2n} = (-1)^n \,, \qquad i^{2n+1} = i \cdot i^{2n} = \underline{i \cdot (-1)^n}$$

$$e^{ix} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}} + i \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}$$

$$= \cos x + i \sin x \,.$$

$\square$

INTEGRALE DI RIEMANN

1) Definizione di integrale
2) Proprietà generali dell'integrale
3) Funzioni integrabili
4) Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale
5) Tecniche di calcolo di integrale:
   - Per sostituzione
   - Per parti
   - Metodo dei fratti semplici
6) Integrale impropri. Teoremi sulla convergenza di int. impropri.

1) Definizione dell' integrale di Riemann

Fissiamo un intervallo $A = [a,b] \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato

importante

DEF (Suddivisione) Una suddivisione di A è un insieme ordinato e finito di punti

$$D = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

con $n \in \mathbb{N}$. Indichiamo con

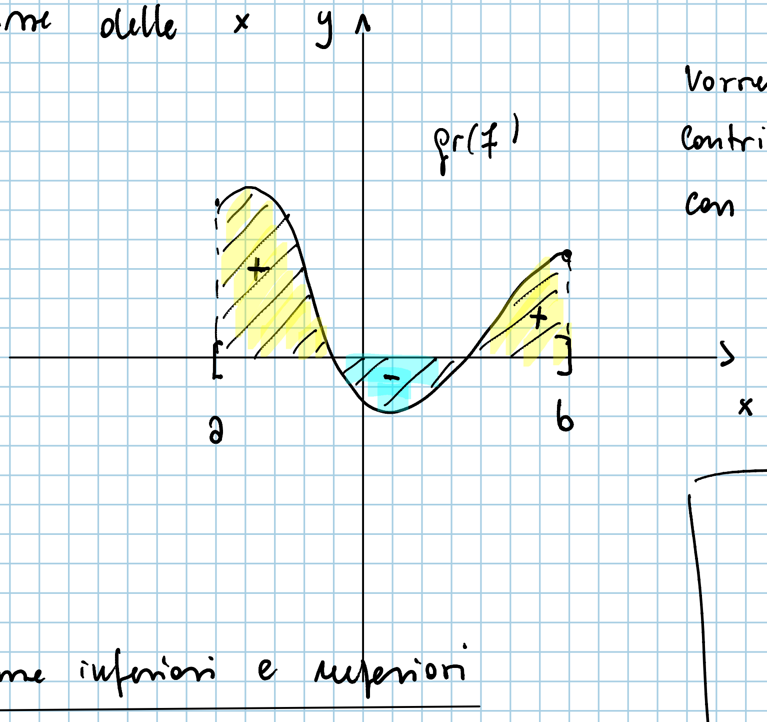
$\mathcal{D}(A)$ l'insieme di tutte le suddivisioni di A.

DEF Diciamo che una suddivisione $D_1 \in \mathcal{D}(A)$ è più fine di una suddivisione $D_2 \in \mathcal{D}(A)$ se

$$D_2 \subset D_1$$

tutti i punti di D_2 sono anche punti di D_1.

Prendiamo ora una funzione $f: A = [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata (IMPORTANTE). Vogliamo definire l'area con segno della regione del piano fra il grafico di f e l'asse delle x



Vorremo indicare il contributo totale di area con il seguente simbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$
numero.

$$\int \longleftrightarrow S \longleftrightarrow \sum$$
Somma

dx = lunghezza di una base infinitesima di rettangoli

Somme inferiori e superiori

Data una suddivisione $D \in \mathcal{D}(A)$

Data una suddivisione $D \in \mathcal{D}(A)$

$$D = \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \}$$

definiamo le somme inferiori di f rispetto a D nel seguente modo:

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, (x_i - x_{i-1})$$

dx = ampiezza di una base infinitesima di rettangoli con altezza $f(x)$

$f(x)\,dx$ = Area del Rettangolo

$\int f(x)\,dx$ = Somma delle Aree

dove $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ e con $x_i - x_{i-1}$ = lunghezza di I_i

e inoltre

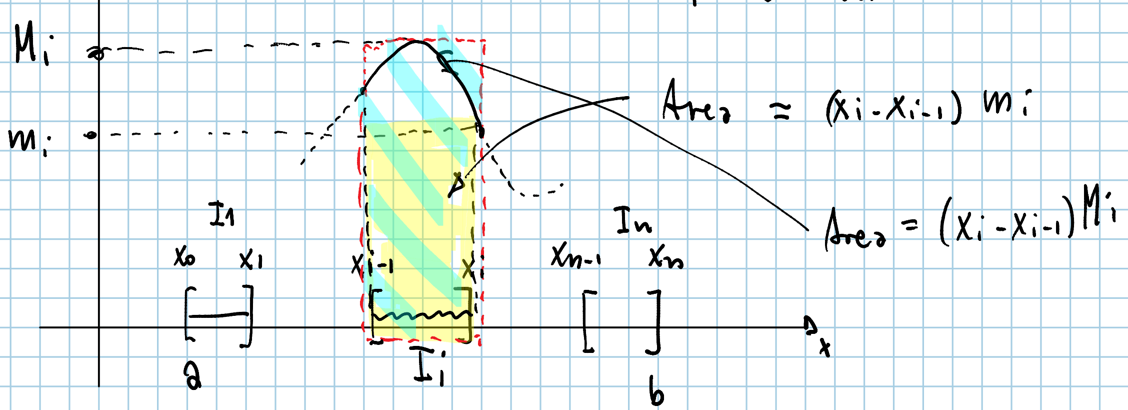
$$m_i = \inf_{x \in I_i} f(x) \qquad m_i \in \mathbb{R} \text{ perché } f \text{ è limitata}$$

Analogamente le somme superiori di f relative a D sono

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, (x_i - x_{i-1})$$

dove

$$M_i = \sup_{x \in I_i} f(x) \qquad M_i \in \mathbb{R} \quad (f \text{ è limitata})$$



Dunque

$S(f, D)$ = Somma delle Aree Azzurre

$s(f, D)$ = Somma delle Aree Gialle

Proprietà:

(1) $s(f, D) \leq S(f, D) \quad \forall D$

(2) Se $D_1 \in \mathcal{D}(A)$ è più fine di $D_2 \in \mathcal{D}(A)$ allora

$$\begin{array}{ccc} s(f, D_1) & \geq & s(f, D_2) \\ \| & & \| \\ S(f, D_1) & \leq & S(f, D_2) \\ \| & & \\ \text{più fine} & & \end{array}$$

(3) Siano ora $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(A)$. Affermo ora che

$$s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$$

Prova:

$$s(f, D_1) \leq s(f, D_1 \cup D_2) \leq S(f, D_1 \cup D_2) \leq S(f, D_2)$$

(4) Da (3) segue che

$$\sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f, D) \leq \inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f, D) .$$

<u>DEF</u> (Integrale di Riemann) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata. Diciamo che f è Riemann-integrabile (integrabile) se

$$I = \sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f, D) = \inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f, D) .$$

In questo caso scriviamo: "Integrale di f su A".

$$\int_a^b f(x)\, dx := I \in \mathbb{R} .$$

Scriveremo anche $f \in \mathcal{R}(A)$ ("f è integr. su A").