Lezione 33

giovedì 19 dicembre 2013
14:14

Esercizio Calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_1^2 \frac{x+3}{x\sqrt{x+2}}\,dx .$$

Sol. Per sostituzione: poniamo $y = \sqrt{x+2}$, $y^2 = x+2$

e quindi $x = y^2 - 2$. Poi

$$dx = 2y\,dy$$

Trasformo gli estremi:

$$x = 1 \to y = \sqrt{3}$$
$$x = 2 \to y = 2$$

Dunque:

$$I = \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{y^2-2+3}{(y^2-2)\cancel{y}} \cdot 2\cancel{y}\,dy$$

$$= 2\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\overbrace{y^2+1}^{= y^2-2+2+1}}{y^2-2}\,dy$$

$$= 2\int_{\sqrt{3}}^{2} \left(1 + \frac{3}{y^2-2}\right) dy$$

$$= 2\int_{\sqrt{3}}^{2} 1\cdot dy + 6\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{1}{(y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2})}\,dy$$

$$= 2\Big[y\Big]_{y=\sqrt{3}}^{y=2} + 6\int_{\sqrt{3}}^{2}\left(\frac{A}{y+\sqrt{2}} + \frac{B}{y-\sqrt{2}}\right)dy$$

$$\frac{1}{(y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2})} = \frac{Ay - A\sqrt{2} + By + B\sqrt{2}}{(y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2})}$$

$$(y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2})$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B\sqrt{2}-A\sqrt{2}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B \\ B\,2\sqrt{2}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ B=\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

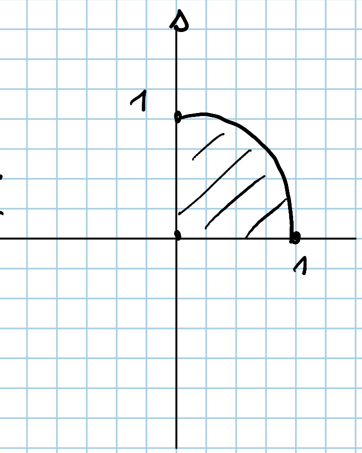
$$I = 2(2-\sqrt{3}) + 6\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{y-\sqrt{2}} - \frac{1}{y+\sqrt{2}}\right) dy$$

$$= 2(2-\sqrt{3}) + 6\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\log|y-\sqrt{2}| - \log|y+\sqrt{2}|\Big]_{y=\sqrt{3}}^{y=2}$$

$$= \ldots \text{ facile.}$$

<u>Esercizio 2</u> Calcolare l'integrale:

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$



Soluzione: Sostituzione

$x = \sin t$, $\quad t = \arcsin x$

Differenziale:

$$dx = \cos t\,dt$$

Estremi

$x=0 \longrightarrow t = \arcsin 0 = 0$

$x=1 \longrightarrow t = \arcsin 1 = \pi/2$

Quindi:

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= \int_0 \cos t \, dt = \int_0 \frac{\qquad}{2} \, dt$$

$$= \left[\frac{t}{2}\right]_{t=0}^{t=\pi/2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2t}{2}\right]_{t=0}^{t=\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\sin\pi}_{=0} - \underbrace{\sin 0}_{=0}\Big) = \frac{\pi}{4}.$$

<u>Esercizio</u> Calcolare $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$ <u>Per parti</u>.

<u>Osservazione</u>

(1) Se nell'integranda appaiono $\sqrt{1-x^2}$, provo la sostituzione $x = \sin t$

(2 Se nell'integranda appaiono $\sqrt{1+x^2}$, provo la sostituzione $x = \sinh t$

Sostituzioni parametriche

<u>Esercizio</u> Calcolare il seguente integrale

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$$

Soluz. Si pone $t = \operatorname{tg}(x/2) \iff \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$

$\iff x = 2\operatorname{arctg}(t)$

Differenziale:
$$\boxed{dx = 2\frac{1}{1+t^2}\, dt.}$$

Trasformo

$$\sin x = \sin\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) =$$

$$\sin x = \sin\left(2\,\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) =$$

$$= 2\,\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

divido numeratore e denominatore per $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$

$$= 2\,\frac{tg\left(\frac{x}{2}\right)}{tg^2\left(\frac{x}{2}\right)+1} = \boxed{\frac{2t}{1+t^2}}$$

$$\cos x = \cos\left(2\,\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2 x/2 + \cos^2 x/2}$$

$$= \frac{1 - tg^2(x/2)}{tg^2(x/2)+1}$$

$$= \boxed{\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$t = tg(x/2)$ $\qquad x = 2\,\mathrm{arctg}(t)$

Estremi

$$x = 0 \to t = 0$$

$$x = \pi/2 \to t = tg(\pi/4) = 1$$

Conclusione

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}}\; 2 \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{2t+1-t^2}\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \log\left(2\sqrt{2}+3\right) - \log 2 . \qquad \square$$

INTEGRALI IMPROPRI

Primo tipo: Integrali su domini di integrazione NON limitati (intervalli).

Secondo tipo. Integrali su intervallo limitato di funzioni NON limitate.

Integrali impropri del 1° tipo.

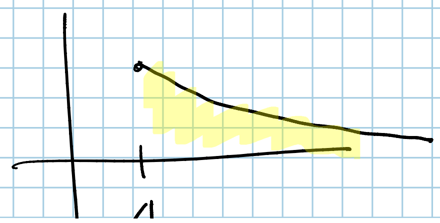
DEF Sia $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Diciamo che f è integrabile in senso improprio (generalizzato) su $[a, \infty)$ se esiste finito il seguente limite

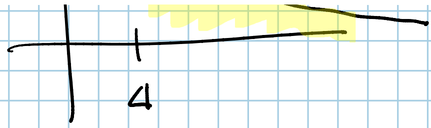
$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)\,dx$$

Esercizio Calcolare l'integrale improprio

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{x\,(\sqrt{x}-1)}\,dx$$



$$I = \int_4 \frac{\quad}{x\,(\sqrt{x}-1)}\,dx$$



Sol. Per $M > 4$, calcolo l'integrale

$$I_M = \int_4^M \frac{1}{x\,(\sqrt{x}-1)}\,dx = \int_2^{\sqrt{M}} \frac{1}{y^{\cancel{2}}\,(y-1)}\, 2\cancel{y}\,dy$$

$\sqrt{x} = y$

$x = y^2 \qquad dx = 2y\,dy$

$x = 4 \to y = \sqrt{4} = 2$

$x = M \to y = \sqrt{M}$

$$= 2 \int_2^{\sqrt{M}} \frac{1}{y\cdot(y-1)}\,dy = 2 \int_2^{\sqrt{M}} \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} \right) dy$$

$$= 2 \Big[\log|y-1| - \log|y| \Big]_{y=2}^{y=\sqrt{M}}$$

$$= 2 \left[\log\left| \frac{y-1}{y} \right| \right]_{y=2}^{y=\sqrt{M}}$$

$$= 2 \left(\log\left| \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} \right| - \log\left| \frac{1}{2} \right| \right)$$

$$= 2 \log\left(2\,\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} \right)$$

$$I = \lim_{M\to\infty} I_M = \lim_{M\to\infty} 2 \log\left(2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)\right)$$

$$= 2\log(2) = \log 4 > 0$$

ESEMPIO (Fondamentale) Al variare del parametro $\alpha > 0$ studiamo la convergenza del seguente integrale improprio

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx .$$

Conti: Per $M > 1$:

$$I_M = \int_1^M x^{-\alpha}\, dx \overset{\alpha \neq 1}{=} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right]_{x=1}^{x=M}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(M^{1-\alpha} - 1 \right)$$

Dunque

$$\lim_{M \to \infty} I_M = \lim_{M \to \infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(M^{1-\alpha} - 1 \right) = \begin{cases} +\infty & 1-\alpha > 0 \iff \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} & 1-\alpha < 0 \iff \alpha > 1 \end{cases}$$

Se $\alpha = 1$:

$$I_M = \int_1^M \frac{1}{x}\, dx = \left[\log|x| \right]_{x=1}^{x=M} = \log|M| \xrightarrow[M \to \infty]{} \infty$$

Conclusioni:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx = \begin{cases} +\infty \text{ diverge} & \alpha \leq 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1} \text{ converge} . & \alpha > 1 \end{cases}$$

TEOREMA (del Confronto) Siano $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni continue tali che $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Allora:

(1) Se $\int_a^{\infty} g(x)\,dx < \infty$ (converge) allora $\int_a^{\infty} f(x)\, dx < \infty$ (converge).

(1) Se $\int_a^\infty g(x)\,dx < \infty$ (converge) allora $\int_a^\infty f(x)\,dx < \infty$.

(2) Se $\int_a^\infty f(x)\,dx \overset{\text{diverge}}{=} \infty$ allora $\int_a^\infty g(x)\,dx \overset{\text{diverge}}{=} \infty$

Dim. Come per le serie.

DEF (Ordine di infinitesimo per $x \to \infty$)

Una funzione $f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ ha ordine di infinitesimo $\alpha > 0$ rispetto a $\frac{1}{x}$ per $x \to \infty$ se esiste finito e diverso da 0 il seguente limite:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} = \underset{\text{finito}}{L} \neq 0$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot f(x).$$

TEOREMA (Criterio del Confronto Asintotico) Sia $f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua infinitesima di ordine $\alpha > 0$ rispetto a $1/x$ per $x \to \infty$. Allora:

(1) Se $\alpha > 1$ allora l'integrale improprio $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge.

(2) Se $\alpha \leq 1$ allora l'integrale improprio $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge.

Dim. Per ipotesi esiste finito e $\neq 0$

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha}$$

Sia ad esempio $L > 0$. Allora esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{L}{2} \leq \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}} \leq 2L \qquad \forall x \geq M$$

e quindi

$$\frac{L}{2}\,\frac{1}{x^{\alpha}} \leq f(x) \leq 2L\,\frac{1}{x^{\alpha}} \qquad \forall x \geq M$$

Integro:

$$\underbrace{\frac{L}{2}\int_{M}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx}_{\substack{\text{diverge} \\ \text{se } \alpha \leq 1}} \leq \underbrace{\int_{M}^{\infty} f(x)\,dx}_{\text{converge} \;\Leftarrow\; /\; \Rightarrow\; \text{diverge.}} \leq \underbrace{2L\int_{M}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx}_{\substack{\text{se converge} \\ \text{se } \alpha > 1}}$$

diverge se $\alpha \leq 1$ $\Longrightarrow$ diverge.

converge $\Longleftarrow$ se converge se $\alpha > 1$

$\square$