Lezione 36

venerdì 10 gennaio 2014
10:11

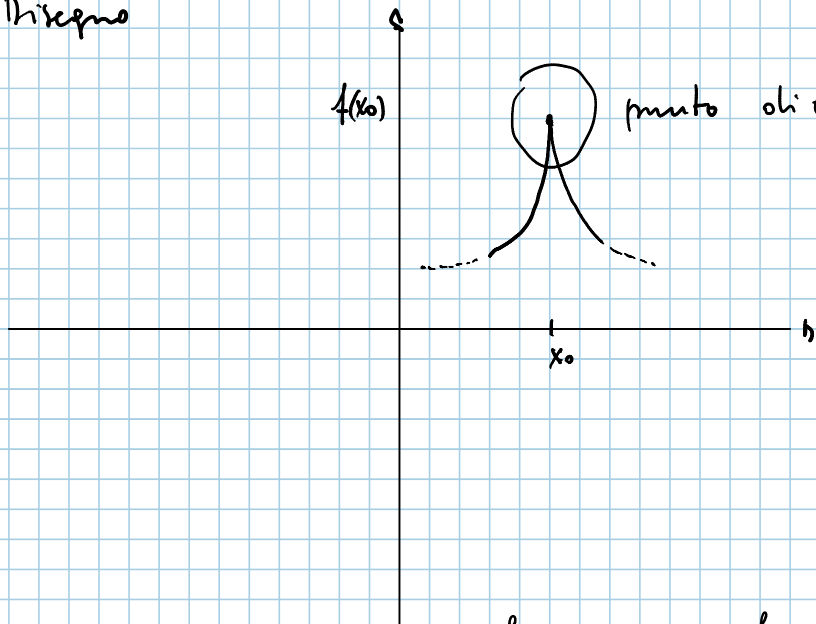
Punti di cuspide

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice punto di cuspide se:

- f è continua su $\mathbb{R}$ (in particolare in x_0)
- f è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$
- $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = +\infty$

$\Big\}$ o viceversa

Disegno



Esercizio Studiare la funzione $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\left|\frac{x}{x-1}\right|}\right)$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\lim_{x \to 1} f(x) = \pi/2$ $\qquad$ $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pi/4$

Se poniamo $f(1) = \pi/2$ otteniamo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è cont. su tutto $\mathbb{R}$ ed in parti. in $x = 1$.

Per $x = 0$ forse f non è deriv.
Per $x = 1$ " " " "
Su $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ f è cert. derivabile

x

Su $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ f è cert. derivabile

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left|\frac{x}{x-1}\right|} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\left|\frac{x}{x-1}\right|}} \cdot \frac{\frac{x}{x-1}}{\left|\frac{x}{x-1}\right|} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Calcolo: $\lim\limits_{x \to 1^\pm} f'(x)$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{1+\left|\frac{x}{x-1}\right|} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left|\frac{x}{x-1}\right|}} \cdot \frac{-1}{\underbrace{(x-1)^2}_{= |x-1| \cdot |x-1|}}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \underbrace{\boxed{\frac{1}{|x-1| + |x|}}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{|x|} \cdot \sqrt{|x-1|}}}_{\to +\infty} \cdot (-1)$$

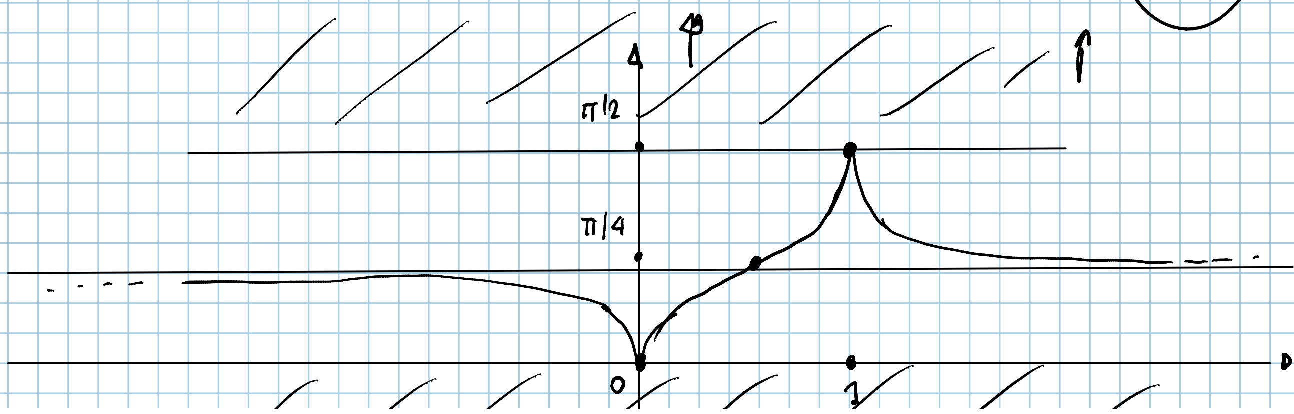
$$= -\infty$$

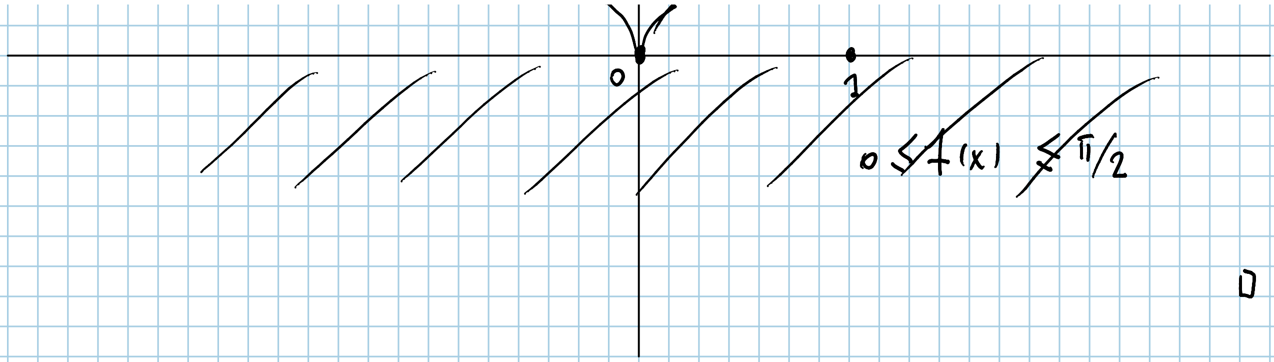
$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = +\infty$$

Dunque $x=1$ è un p.to di cuspide.

Analogamente $x=0$ è un punto di cuspide

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\left|\frac{x}{x-1}\right|}\right) \underset{x \sim 0}{\sim} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{|x|}\right) \underset{x \sim 0}{\sim} \sqrt{|x|}$$





□

Funzioni Convesse

$A = (a, b) \subset \mathbb{R}$ intervallo

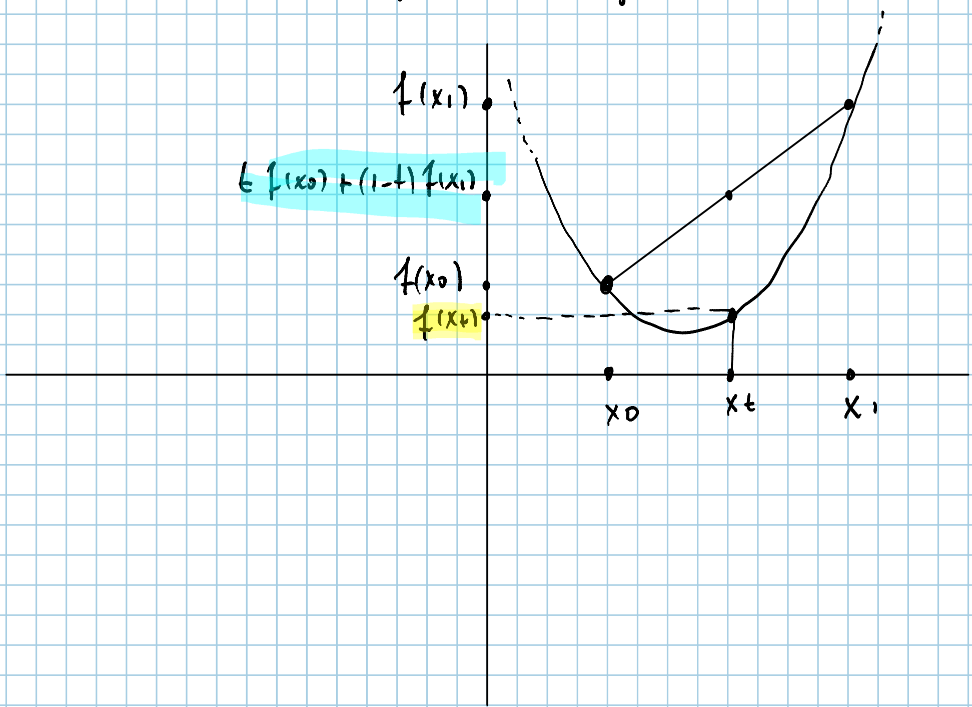
$x_0, x_1 \in A$ per $t \in [0,1]$ otteniamo

$$x_t = t x_1 + (1-t) x_0$$

Consideriamo anche il punto (nelle ordinate)

$$t f(x_1) + (1-t) f(x_0)$$

La curva $t \mapsto (x_t, t f(x_1) + (1-t) f(x_0))$ descrive il seguente segmento nel piano $\mathbb{R}^2$:



Definizione (1) Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice convessa

intervallo

su A se $\forall x_0, x_1 \in A$ e $\forall t \in [0,1]$ si ha:

su A se $\forall\, x_0, x_1 \in A$ e $\forall\, t \in [0,1]$ si ha:

$$\boxed{f(x_t) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_0)}$$

Geometricamente: il grafico di f sta sotto il segmento per ogni $x_0, x_1 \in A$

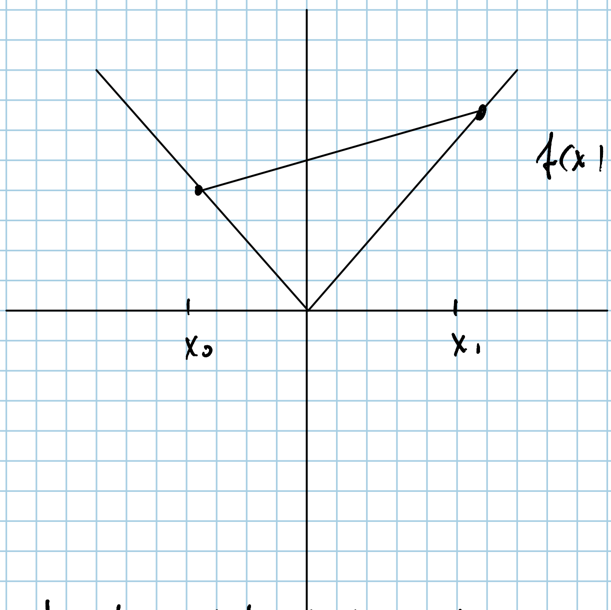
(2) Diciamo poi che $f : A \to \mathbb{R}$ è concava se $-f$ è convessa su A.

Esercizio Verifico che $f(x) = |x|$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$.

Infatti: $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ e $t \in [0,1]$

$$f(x_t) = |t x_1 + (1-t) x_0| \leq |t x_1| + |(1-t) x_0| =$$

$$= t|x_1| + (1-t)|x_0| = t f(x_1) + (1-t) f(x_0).$$



Esercizio Usando la definizione provare che $f(x) = x^2$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$.

Prendo $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ e $t \in [0,1]$ e provo che

$$f(t x_1 + (1-t) x_0) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_0)$$

$$(t x_1 + (1-t) x_0)^2 \leq t x_1^2 + (1-t) x_0^2$$

$$\|$$

$$\circledast \quad = t^2 x_1^2 + 2 x_1 x_0 t(1-t) + (1-t)^2 x_0^2 \leq$$

$$⊛ = t^2 x_1^2 + 2 x_1 x_0 t(1-t) + (1-t)^2 x_0^2 \leq$$

Uso la oss. $2a\cdot b \leq a^2+b^2 \iff 0 \leq (a-b)^2$

$$⊛ = t^2 x_1^2 + 2\sqrt{t}\sqrt{1-t}\, x_1 \cdot \sqrt{t}\sqrt{1-t}\, x_0 + (1-t)^2 x_0^2 \leq$$

$$\leq t^2 x_1^2 + t(1-t)x_1^2 + t(1-t)x_0^2 + (1-t)^2 x_0^2 =$$

$$= x_1^2\left(\cancel{t^2} + t - \cancel{t^2}\right) + x_0^2\left(t - \cancel{t^2} + 1 - 2t + \cancel{t^2}\right)$$

$$= t x_1^2 + (1-t)x_0^2$$ sì fine.

TEOR 1 Se $A = (a,b)$ è un intervallo aperto ed $f: A \to \mathbb{R}$ è convessa su A allora f è continua su A.

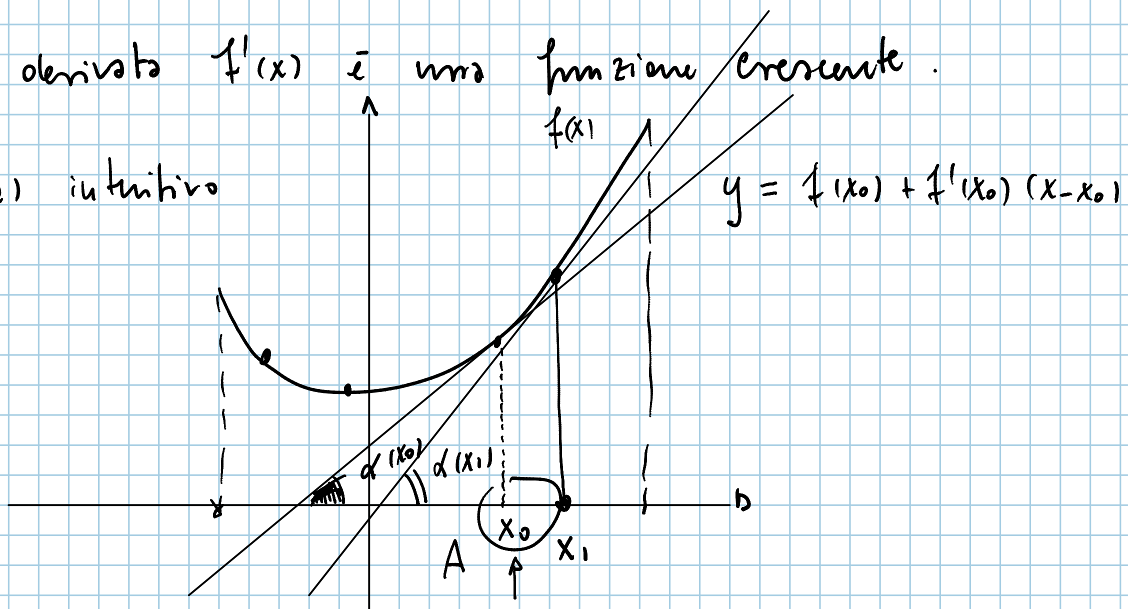
TEOR 2 Sia $A \subset \mathbb{R}$ un intervallo ed $f: A \to \mathbb{R}$ sia derivabile su A. Allora sono equivalenti le seguenti tre affermazioni:

(1) f è convessa su A;

(2) $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad \forall x, x_0 \in A$

(3) La derivata $f'(x)$ è una funzione crescente.

(1) $\iff$ (2) intuitivo



Commento se $x_0 \to x_1$ e cresce allora $\alpha(x_0) \to \alpha(x_1)$ cresce.

cresce.

$$\Downarrow$$

$f'(x_0) \to f'(x_1)$ cresce

TEOR 3 $A \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: A \to \mathbb{R}$ sia di classe C^2 (esiste f''). Allora sono eq.:

(1) f è convessa su A;

(2) $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in A$

Dim

$(1) \overset{\Rightarrow}{\Leftarrow} (2)$

$$f \text{ è convessa} \overset{\text{TEOR 2}}{\Leftrightarrow} f' \text{ è crescente} \Leftrightarrow f'' \geq 0$$

DEF Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 (esiste f''). Diciamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ è un p.to di flesso se esiste $\delta > 0$ tale che

(i) f è convessa su $(x_0, x_0+\delta)$ $\quad$ ($f'' \geq 0$ su $(x_0, x_0+\delta)$)

(ii) f è concava su $(x_0-\delta, x_0)$ $\quad$ ($f'' \leq 0$ su $(x_0-\delta, x_0)$).

O viceversa.

ES1 Verificare che $f(x) = x \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ è concava su $x>0$.

Derivo:

$$f'(x) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) + x \, \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{} + \frac{1}{}$$

$$= - \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-(x+1) + x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0 \quad \forall x > 0$$

$\underline{\underline{x > 0}}$

Dunque per il TEOR 3 f è concava su $x > 0$.

$\underline{\text{ES}}$ Calcolare il seguente limite per $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x \, \sin(x^4) + \cosh\left(e^{\sqrt{2}x} - 1\right) - 1 - \sin(x^2)}{x^\alpha - \sin x}$$

Conti:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$D(x) = x^\alpha - \sin x = x^\alpha - x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$= \begin{cases} \frac{x^3}{3!} + o(x^3) & \alpha = 1 \\ -x + o(x) & \alpha > 1 \\ x^\alpha + o(x^\alpha) & 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

Numeratore:

$$\sin(x^4) = x^4 + o(x^4)$$

Riporto da

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\sin(x^2) = x^2 - x^6/3! + o(x^6) = x^2 + o(x^5)$$

Devo sviluppare $\cosh\left(e^{\sqrt{2}x}-1\right)$

Preparazione:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$e^{\sqrt{2}x} - 1 = \sqrt{2}x + x^2 + \frac{(\sqrt{2})^3}{3!}x^3 + o(x^3)$$

Poi:

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Sost.

$$\cosh\left(e^{\sqrt{2}x}-1\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}x + x^2 + \frac{(\sqrt{2})^3}{3!}x^3 + o(x^3)\right)^2 + o(x^3)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(2x^2 + 2\cdot\sqrt{2}x^3\right) + o(x^3).$$

Finiamo Prox. sett.