# Lezione 37

mercoledì 15 gennaio 2014
14:26

ES 1 Sia $A = \{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z = 0 \}$ e sia $f : \underbrace{\mathbb{C} \setminus \{ \bar{z}+1 = 0 \}}_{= D(f)} \to \mathbb{C}$

$$f(z) = i \, \frac{z}{\bar{z}+1} .$$

$\bar{z}+1 \neq 0$

Rappresentare l'unione $B = \{ z \in D(f) : f(z) \in A \}$.

Soluzione

$$f(z) \in A \iff \mathrm{Re}\, f(z) = 0$$

$$\iff \frac{1}{2} \left( f(z) + \overline{f(z)} \right) = 0$$

$$\iff i \, \frac{z}{\bar{z}+1} + \overline{\left( i \, \frac{z}{\bar{z}+1} \right)} = 0$$

$$\iff i \, \frac{z}{\bar{z}+1} - i \, \frac{\bar{z}}{z+1} = 0$$

$$\iff i \left( \frac{z}{\bar{z}+1} - \frac{\bar{z}}{z+1} \right) = 0$$

$$\iff \frac{z(z+1) - \bar{z}(\bar{z}+1)}{\underbrace{(\bar{z}+1)(z+1)}_{= |z+1|^2}} = 0 \qquad z \neq -1$$

$$\iff z^2 + z - \bar{z}^2 - \bar{z} = 0$$

Poniamo $z = x+iy$

$$(x+iy)^2 + x + iy - (x-iy)^2 - (x-iy) =$$

$$x^2 + 2ixy - y^2 + x + iy - [x^2 - 2ixy - y^2 + x - iy] = 0$$

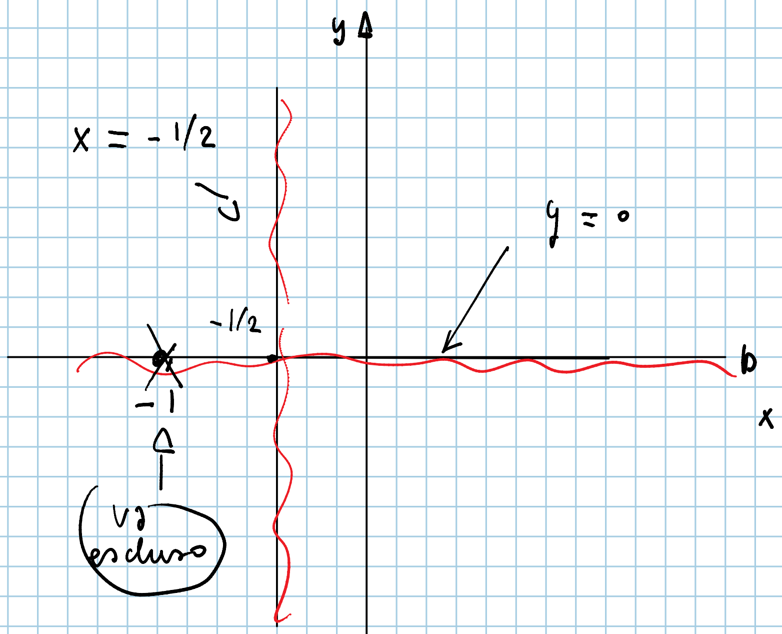
L'eq. diventa

$$4ixy + 2iy = 0$$

$$2xy + y = 0$$

$$y \cdot (2x+1) = 0 \iff y = 0 \text{ oppure}$$

$$y \cdot (2x+1) = 0 \iff y = 0 \text{ oppure } 2x+1 = 0$$




Dobbiamo avere $\bar{z}+1 \neq 0 \iff \bar{z} \neq -1 \iff z \neq -1$

Es. 2 Al variare di $\alpha > 0$ studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{e^{1/n^2} - \cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)} .$$

Soluzione. Conv. semplice. Uso criterio di Leibniz

$$a_n = \sqrt{e^{1/n^2} - \cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)}$$

- $\lim_{n\to\infty} a_n \overset{?}{=} 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{e^{1/n^2} - \cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)} = \sqrt{1-1} = 0$$

- Esamino se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente.

$n \longmapsto e^{1/n^2}$ decrescente

$n \longmapsto \cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)$