Lezione 4

venerdì 11 ottobre 2013
10:17

negativo

1) $\arg(z) = \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ $\qquad z = x+iy$ è nel 2° op. 3° quadrante

$x < 0$
$y \geq 0$ nel 2°
$y < 0$ nel 3°

- <u>Rappresentazione trigonometrica ed esponenziale di un n. complesso</u>

Sia $z = x+iy \in \mathbb{C}$ un numero complesso.
forma algebrica

Siano poi $r = |z| \geq 0$ il modulo di z
e $\vartheta = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ il suo argomento.

Allora

$$x = \operatorname{Re}(z) = r\cos\vartheta$$

$$y = \operatorname{Im}(z) = r\sin\vartheta$$

Dunque

$$z = x+iy = r\cos\vartheta + i\, r\sin\vartheta$$
$$= r\,(\cos\vartheta + i\sin\vartheta).$$

Rappresentazione trigonometrica.

Conto : $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ e $w = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$R \geq 0$ $\qquad \varphi = \arg(w)$
$R = |w|$ $\qquad \in [0, 2\pi)$

Prodotto :

$$z \cdot w = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\, R\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$= rR\,(\cos\vartheta\cos\varphi + i\cos\vartheta\sin\varphi + i\sin\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi)$$

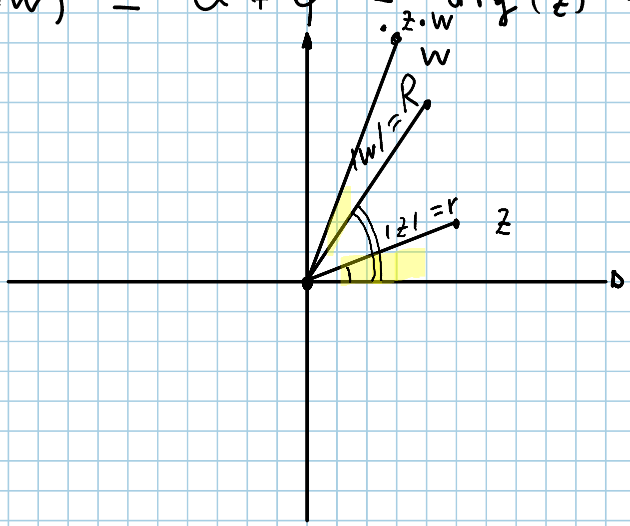
$$= rR\,\big(\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi + i(\cos\vartheta\sin\varphi + \sin\vartheta\cos\varphi)\big)$$

Uso le formule di addizione per seno e coseno e trovo

$$z \cdot w = rR\,\big(\cos(\vartheta+\varphi) + i\sin(\vartheta+\varphi)\big)$$

Conclusione:

- $|z \cdot w| = r \cdot R = |z| \cdot |w|$;
- $\arg(z \cdot w) = \vartheta + \varphi = \arg(z) + \arg(w)$.



Definizione esponenziale: Introduciamo la seguente notazione

$$\boxed{e^{i\vartheta} := \cos\vartheta + i\sin\vartheta}$$

Formula di Eulero.

Proprietà L'esponenziale complesso verifica le seguenti proprietà:

- $|e^{i\vartheta}| = \sqrt{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta}$ [illegible] seguenti proprietà:

$$(1) \quad |e^{i\vartheta}| = \sqrt{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta} = 1 \quad \forall \vartheta$$

$$(2) \quad e^{i\vartheta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\vartheta+\varphi)} \quad \forall \vartheta \ \forall \varphi$$

(Proprietà delle potenze)

$$(3) \quad \left(e^{i\vartheta}\right)^n = \underbrace{e^{i\vartheta} \cdot \ldots \cdot e^{i\vartheta}}_{n \text{ volte}} = e^{in\vartheta} \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Formula di de Moivre.

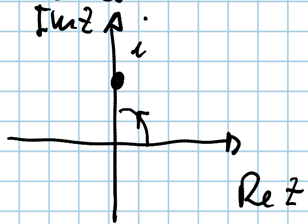
Dunque un numero complesso $z = x+iy \in \mathbb{C}$ si può anche rappresentare in <u>forma esponenziale</u>:

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = r\,e^{i\vartheta}$$

dove $r = |z| \geq 0$

e $\vartheta = \arg(z) \in [0, 2\pi)$

<u>Esempio</u> . Scrivere $i \in \mathbb{C}$ in forma esponenziale:

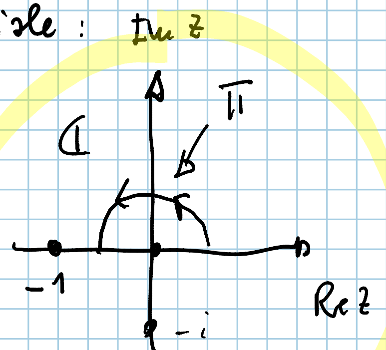


$$|i| = 1 \qquad \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

Dunque

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

- Scrivere $-1 \in \mathbb{C}$ in forma esponenziale:



$$|-1| = +1$$

$$\arg(-1) = \pi$$

Dunque

$$-1 = e^{i\pi}.$$

$$-1 = e$$

Ribadiamo:

$$|-1| = |-1 + i\cdot 0| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1.$$

Argomento. Siccome $-1 \in 2°$ oppure $3°$ quadrante ho

$$\arg(-1) = \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{-1}\right) = \pi.$$

con $y = \operatorname{Im}(-1) = 0$
$x = \operatorname{Re}(-1) = -1$.

Radici di un numero complesso

Sia $w \in \mathbb{C}$ un numero complesso assegnato e sia $n \in \mathbb{N}$ un numero naturale finito.

Vogliamo calcolare tutte le radici n-esime di w.

Più precisamente ancora: vogliamo calcolare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che:

$$z^n = w.$$

Risolviamo tale equazione.

- Scriviamo w in forma esponenziale:

$$w = R\, e^{i\varphi} \quad \text{con} \quad R = |w| \geq 0$$
$$\varphi = \arg(w) \in [0, 2\pi).$$

- Cerchiamo soluzioni di $z^n = w$ in forma esponenziale:

$$z = r\, e^{i\vartheta}$$

dove $r = |z| \geq 0$ e $\vartheta = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ sono le incognite da determinare.

Conti

$$\begin{aligned} &= \left(re^{i\vartheta}\right)^n = z^n = w = Re^{i\varphi} \\ &= r^n \left(e^{i\vartheta}\right)^n = r^n e^{in\vartheta} \end{aligned}$$

Formula di de Moivre

Eguagliando moduli e argomenti si ottiene un sistema di due equazioni:

$$\begin{cases} r^n = R \\ n\vartheta = \varphi + 2k\pi \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La prima ha soluzione $r = \sqrt[n]{R}$.

L'argomento è

$$\vartheta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad \underbrace{k = 0, 1, \dots, n-1}_{n \text{ valori di } k}$$

Dunque le soluzioni dell'equazione $z^n = w$ sono i numeri complessi $z_k \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[n]{R}\, e^{i\vartheta_k} \qquad k = 0, 1, \dots n-1 \\ &= \sqrt[n]{R}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}. \end{aligned}$$

<u>Osservazione</u>: I numeri complessi z_k hanno tutti lo stesso modulo (sono tutti sulla circonf. di

stesso modulo (sono tutti sulla circonf. di raggio $\sqrt[n]{R}$ centrata in $0 \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$) e si dispongono sui vertici di un poligono regolare di n lati.

<u>Esempio</u> Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^4 + 1 = 0.$$

Avremo l'eq.

$$z^4 = -1$$

Dobbiamo calcolare le radici 4^e di $w = -1$.

Scrivo w in forma esponenziale:

$$w = -1 = e^{i\pi}, \quad |w| = 1 \quad \arg(w) = \pi.$$

Cerco $z = re^{i\vartheta}$ con $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$ da determinare tali che

$$r^4 e^{i4\vartheta} = (re^{i\vartheta})^4 = z^4 = w = -1 = e^{i\pi}$$

Sistema

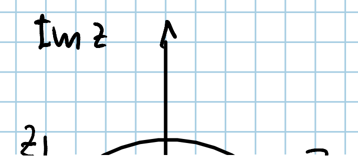
$$r^4 = 1 \overset{(r \geq 0)}{\iff} r = 1$$

$$4\vartheta_k = \pi + 2k\pi$$

$$\Updownarrow$$

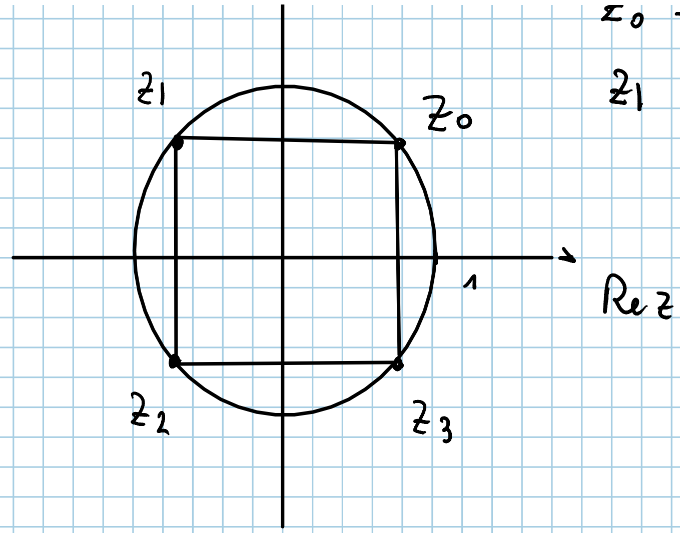
$$\vartheta_k = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Rappresento le soluzioni nel piano di Gauss:



$$z_0 = e^{i\pi/4}$$

$$z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$



$z_0 = e$

$z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$

In forma algebrica:

$$z_0 = e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_1 = e^{i3\pi/4} = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_2 = \ldots$$

$$z_3 = \ldots$$

$\square$

Numeri Complessi come spazio Metrico

Definiamo la distanza fra due numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$ nel seguente modo:

$$d(z,w) = |z-w|$$

Se $z = x+iy$ e $w = \xi + i\eta$, avremo:

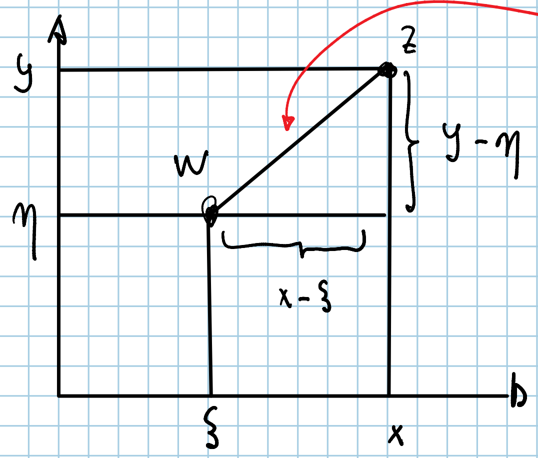
$$|z-w| = |x+iy - (\xi + i\eta)|$$

$$= |x - \xi + i(y-\eta)|$$

$$= |x - \xi + i(y - \eta)|$$

$$= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \, .$$

$|z-w| = d(z,w)$

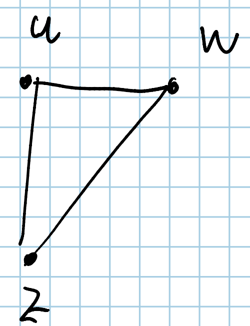


<u>Propietà:</u>

1) $d(z,w) \geq 0$ e $d(z,w) = 0 \iff z = w$

2) $d(z,w) = d(w,z)$

3) $d(z,w) \leq d(z,u) + d(u,w)$.



<u>Esempio 1</u> Fissati $z_0 \in \mathbb{C}$ ed $r > 0$, l'insieme

$$A = \{ z \in \mathbb{C} \, : \, |z - z_0| = r \}$$

è la circonferenza di centro z_0 e raggio r.

<u>Esempio 2</u> Fissati $z_0 \in \mathbb{C}$ ed $r > 0$, l'insieme

$$B = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r \}$$

è il cerchio di centro z_0 e raggio r.

Esempio 3

$$E = \{ z \in \mathbb{C} : |z - i| + |z + i| = 4 \}$$

è un'ellisse di fuochi $+i$ e $-i$.