Lezione 7

venerdì 18 ottobre 2013
10:19

Esercizio 8 Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell' equazione

$$z^3 \cdot \bar{z} + 3z^2 - 4 = 0 .$$

Soluzione. Idea: $z = x+iy$ e sost. ⇝ Troverei un sistema di 2 eq. in x e y del 4° grado.

Ricopio

$$z^2 (z\bar{z} + 3) - 4 = 0$$

$$\boxed{z^2 (|z|^2 + 3) = 4}$$

$$\Downarrow$$

$$= |z^2| \cdot |(|z|^2+3)| = \left| z^2 (|z|^2 + 3) \right| = |4| = 4$$

$$= |z|^2 \cdot (|z|^2 + 3)$$

Ponendo $|z|^2 = t \in \mathbb{R}$ $t \geq 0$ trovo:

$$t(t+3) = 4 \iff t^2 + 3t - 4 = 0$$

Calcolo t

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$$

$t = -4$ è da scartare. Rimane

$$|z|^2 = t = 1 \implies |z| = 1$$

Sost. sopra $|z| = 1$ trova

$$z^2(1+3) = 4$$

$$z^2 = 1 \iff z = \pm 1$$

$\square$

SUCCESSIONI NUMERICHE

Una successione è una funzione $\boxed{a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}.}$
Scriveremo

$$a_n = a(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

E indicheremo la successione in questo modo:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Il numero reale a_n si chiama il termine (elemento) n-esimo della successione.

La successione si può anche introdurre elencando in modo ordinato i suoi termini.

Ad esempio la succ. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n = \frac{n}{n+1}$ è:

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

Def. (Successione convergente) Diciamo che una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad un numero $L \in \mathbb{R}$ se:

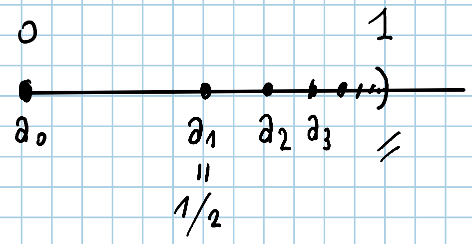
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha $|a_n - L| < \varepsilon$.

Diremo in questo caso che $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente (ad un L finito) e che $L \in \mathbb{R}$ è il suo limite.
Scriveremo:

$$L = \lim_{n \to \infty} a_n \quad \text{oppure} \quad a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} L .$$

<u>Esempio</u> Verifichiamo tramite la definizione che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$



Devo verificare che:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq \bar{n} \text{ si ha } \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

Disequazione:

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{\cancel{n} - \cancel{n} - 1}{n+1} \right| < \varepsilon$$

$$\iff \frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n+1$$

$$\iff n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Sì: trovo certamente $\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ e $\forall n \geq \bar{n}$ la diseq. sarà verificata. $\square$

<u>Prop.</u> (Unicità del limite) Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

ad un limite $L \in \mathbb{R}$, allora questo limite è unico.

Dim. Siano $L, M \in \mathbb{R}$ entrambi limiti di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Fisso $\varepsilon > 0$ arbitrario. Allora:

$$\exists \bar{n} \ \forall n \geq \bar{n} : \quad |a_n - L| < \varepsilon \qquad \text{Def. di limite}$$

$$\exists \bar{n} \ \forall n \geq \bar{n} : \quad |a_n - M| < \varepsilon \qquad \text{"} \qquad \text{"}$$

Allora:

$$|L-M| = |\underbrace{L-a_n}_{} + \underbrace{a_n - M}_{}|$$

$$\leq |L-a_n| + |a_n - M| = \underset{\varepsilon}{|a_n - L|} + \underset{\varepsilon}{|a_n-M|}$$

scelgo a piacere $n \geq \bar{n}$ $\leq$

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Ho provato che $|L-M| < 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

Allora deve essere $|L-M| = 0$ ovvero $L = M$.

$\square$

Definizione Diremo che una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ∞ ("più infinito") se:

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq \bar{n} \text{ si ha } a_n \geq M.$$

Scriveremo in questo caso:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{opp.} \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Esercizio per casa: Definire:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

$\equiv$

Osservazione

1° caso $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $L \in \mathbb{R}$

2° caso $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\pm\infty$

3° caso Tutte le altre $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: sono le successioni che NON hanno limite né finito né $\pm\infty$.

Esempio $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\text{NON ha limite}}$

$a_0 = 1 \quad a_1 = -1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = -1 \quad \dots$

$$a_{2n} = 1$$

$$a_{2n+1} = -1$$

Def Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice limitata se esiste $C > 0$ tale che

$$|a_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prop Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad $L \in \mathbb{R}$ allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata.

Dim. Scelgo $\varepsilon > 0$ a piacere. Allora $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|a_n - L| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}. \quad \text{Def. Limite}$$

Definisco

$$C = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{\bar{n}}|, L + \varepsilon\}$$

$$C = \max \{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{\bar n}|, L+\varepsilon\}$$

Ora verifico che $|a_n| \leq C \quad \forall n \geq 0$

Infatti: se $n = 0, 1, 2 \dots, \bar n$ allora

$$|a_n| \leq C = \max\{\dots\} \quad \text{Banale}$$

Per $n \geq \bar n$:

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| <$$

$$< \varepsilon + L \leq C$$

$\square$

Teorema (Operazioni con i limiti) Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni convergenti:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$$

$$M = \lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}.$$

Allora:

1) La successione somma $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n .$$

2) La successione prodotto $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) .$$

3) Se $M \neq 0$ e $b_n \neq 0 \ \forall n$ allora la successione quoziente

$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{L}{M}.$$

Dim. Provo la 2). Devo dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = L \cdot M.$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Ricopio le ipotesi:

$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$: $\exists \bar{n}\ \forall n \geq \bar{n}$ si ha $|L - a_n| < \varepsilon$

$b_n \to M$: $\exists \bar{n}\ \forall n \geq \bar{n}$ si ha $|M - b_n| < \varepsilon$.

Poi siccome $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge allora esiste $C > 0$ tale che $|b_n| \leq C \quad \forall n \geq 0$.

Dunque

$$|a_n b_n - L \cdot M| = |\underline{a_n \cdot b_n - b_n \cdot L} + \underline{b_n \cdot L - LM}| \leq$$

$$\leq |a_n b_n - b_n L| + |b_n L - L \cdot M| =$$

$$= \underset{\leq C}{|b_n|} \cdot \underset{\substack{<\\ \varepsilon \text{ per } n \geq \bar{n}}}{|a_n - L|} + |L| \cdot \underset{\substack{<\\ \varepsilon \text{ per } n \geq \bar{n}}}{|b_n - M|} \leq$$

$$C \cdot \varepsilon + |L| \cdot \varepsilon = \underline{(C + |L|) \cdot \varepsilon}$$

$\underline{\forall n \geq \bar{n}}$ $\square$

2° Strumento negli esercizi:

Teorema (Criterio del confronto) Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$(\forall n \geq \bar{n})$$

Supponiamo che esistano finiti ed uguali i limiti

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L \in \mathbb{R}.$$

Allora anche $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L.$$

Dim. Fisso $\varepsilon > 0$. Per ipotesi $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ e $\forall n \geq \bar{n}$ si ha

$$|a_n - L| < \varepsilon$$
$$|c_n - L| < \varepsilon.$$

Allora:

$$b_n - L \leq c_n - L \leq |c_n - L| < \varepsilon$$
$$L \underbrace{- b_n}_{\leq -a_n} \leq L - a_n \leq |L - a_n| < \varepsilon$$
$$\forall n \geq \bar{n}$$

Ovvero

$$|b_n - L| < \varepsilon \qquad \forall n \geq \bar{n}.$$

Osservazioni

1) • $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
"(a_n) succ. infinitesima" $\Rightarrow \lim a_n b_n =$

1) • $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

"$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ succ. infinitesima"

• $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ succ. limitata

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ succ. infinitesima} \\ (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ succ. limitata} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$$

Ovvero:

$$\begin{array}{c} \text{succ infinitesima} \cdot \text{succ. limitata} \\ \| \\ \text{succ. infinitesima} \end{array}$$

2)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ a_n \le b_n \quad \forall n \\ \bullet\ \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$$

$2^\wedge$ Eq $\rightarrow$ $x = 0$ opp. $y = 0$.

1° caso $x = 0$. Trovo $0 - y^2 = 1$ No soluz.

2° caso $y = 0$ Avremo $x^2 - 0 = 1$ $x = \pm 1$

$z = +1 + i \cdot 0 = 1$

$z = -1 + i \cdot 0 = -1$