Lezione 8

mercoledì 23 ottobre 2013
14:27

3) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $\pm\infty$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata allora

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\pm\infty$$

4) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ e $b_n \geq c > 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$, allora
(è staccata da 0)

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty .$$

Esempi di successioni elementari

Esempio 1 Siano

$$P(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_q x^q + b_{q-1} x^{q-1} + \dots + q_1 x + q_0$$

polinomi con $a_p \neq 0$ e $b_q \neq 0$ ed anzi $a_p>0$ e $b_q>0$

Allora

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \dots + b_1 n + b_0}} =$$

$$= \begin{cases} \infty & p>q \\ \dfrac{a_p}{b_p} & p=q \\ 0 & p<q \end{cases}$$

$$= n^{p-q}\,\frac{a_p + a_{p-1}\overbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}^{\to 0} + \dots + a_1\overbrace{\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)}^{\to 0} + a_0\overbrace{\left(\frac{1}{n^p}\right)}^{\to 0}}{b_q + b_{q-1}\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to 0} + \dots + b_1\underbrace{\left(\frac{1}{n^{q-1}}\right)}_{\to 0} + a_0\underbrace{\left(\frac{1}{n^q}\right)}_{\to 0}}$$

$$n^{p-q} \to \begin{cases} \infty & \text{se } p>q \\ 0 & \text{se } p<q \\ 1 & \text{se } p=q \end{cases}$$

Esempio 2 (Successione geometrica). Sia $q\in\mathbb{R}$ un numero reale. Studiamo la convergenza $a_n = q^n$, $n\geq 0$.

numero reale. Studiamo la convergenza $a_n = q^n$, $n \geq 0$.

Allora

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & |q| < 1 \\ 1 & q = 1 \\ \text{non esiste} & q \leq -1 \\ +\infty & q > 1 \end{cases}$$

Parto dal caso $q > 1$. In questo caso $q = 1 + x$ con $x > 0$ allora

$$q^n = (1+x)^n \underset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + nx$$

dove $\lim_{n\to\infty} 1 + nx = \infty$ e quindi per confronto

$$\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty .$$

- Caso $0 < q < 1$. Allora $p = \frac{1}{q} > 1$

  Quindi $\lim_{n\to\infty} p^n = \infty$, dunque

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n} \quad \underset{\substack{\| \\ \frac{1}{q^n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n}}{p^n} > \frac{1}{\varepsilon} .$$

ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \ \forall n \geq \bar{n} : 0 < q^n < \varepsilon$$

Dunque $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ se $0 < q < 1$

Se $-1 < q < 0$ allora $|q| < 1$ e $|q|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\Downarrow$$

$$q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Esempio 3 Sia $p > 0$ un numero fissato:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1 .$$

Dim. Suppongo $p > 1$ e dunque $\sqrt[n]{p} > 1$ e dunque

$$\sqrt[n]{p} = 1 + a_n \quad \text{con } \boxed{a_n > 0}$$

e dunque

$$\sqrt[n]{p} = 1 + a_n \quad \text{con} \quad \boxed{a_n > 0}$$

Dunque

$$p = (1+a_n)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + n\, a_n$$

da cui:

$$0 < a_n \leq \frac{p-1}{n}$$

$$0 \to 0 \quad \Rightarrow \quad a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \Leftarrow \quad \frac{p-1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Teorema del Confronto.

Se $0<p<1$ allora

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{p}}} = 1 .$$

<u>Esempio 4</u> Sia $\beta > 0$ un numero fissato. Allora

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\beta}} = 1$$

Dim. Solo per $\beta = 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 .$$

Certamente $\sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1 + a_n$ $\quad a_n > 0$ per $n \geq 2$

Dunque

$$\sqrt{n} = (1+a_n)^n \overset{B.}{\geq} 1 + n \cdot a_n$$

e trovo

$$0 < a_n \leq \frac{\sqrt{n}-1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}$$

$$0 \to 0 \qquad a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ per Confronto} \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Conclusione:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1+a_n)^2 = 1 .$$

perché $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Esempio 5 (Confronto fra potenze ed esponenziali)

Siano $a, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\beta > 0$ e $\underline{\underline{a > 1}}$. Allora

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0$$

Considero

$$b_n = \frac{n^\beta}{a^n}$$

Formo il quoziente

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^\beta}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^\beta} = \boxed{\left(\frac{n+1}{n}\right)^\beta} \cdot \frac{1}{a}$$

Ora

$$\lim_{n \to \infty} \Big(1 + \underbrace{\boxed{\tfrac{1}{n}}}_{0}\Big)^\beta = 1$$

e dunque

$$\lim_{n \to \infty} \boxed{\frac{b_{n+1}}{b_n}} = \frac{1}{a} \underline{\underline{< 1}}$$

Quindi se $\frac{1}{a} < q < 1$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ noi avremo

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} < q \iff \boxed{b_{n+1} < q \cdot b_n \quad \forall n \geq \bar{n}.}$$

dunque anche $b_n < \boxed{q} \cdot \underline{\underline{b_{n-1}}}$ se $n-1 \geq \bar{n}$

Metto insieme e trovo

$$b_{n+1} < q \cdot b_n < q^2 \, b_{n-1} < q^3 \cdot b_{n-2}$$

$$< \dots < q^{n-\bar{n}+1} b_{\bar{n}}$$

Riordino:

$$0 < b_{n+1} < q^n \cdot \frac{b_{\bar{n}}}{q^{\bar{n}-1}}$$

numero finito

$0 \downarrow 0$, $\quad b_{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0$, $\quad q^n \xrightarrow{n \to \infty} 0$

prog. geometrica con $0 < q < 1$

Esempio 6 (Confronto fra esponenziale e fattoriale).

Sia $a > 0$. Allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

Come sopra $\quad b_n = \dfrac{a^n}{n!} \qquad$ Tesi: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a^{n+1}}{a^n} \cdot \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cdot \cancel{n!}} = \frac{a}{n+1}$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 0 \implies \exists\, \bar n \ \forall n \geq \bar n \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} < \frac{1}{2}$$

ovvero $\quad b_{n+1} < \dfrac{1}{2} b_n$

Iterazione:

$$0 < b_{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{b_{\bar n}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\bar n - 1}} \quad \text{finito}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$0 \qquad\qquad 0$$

Confronto.

Esempio 7 (Confronto di potenze e logaritmi)

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha, \beta > 0$. Allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^\beta}{n^\alpha} = 0$$

Sostituzione: $\log n = x_n$ ovvero $n = e^{\log n} = e^{x_n}$

dove $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \log n = \infty$

$$\frac{(\log n)^\beta}{n^\alpha} = \frac{(x_n)^\beta}{\left(e^{x_n}\right)^\alpha} = \frac{x_n^\beta}{\left(e^\alpha\right)^{x_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad (x_n \to \infty).$$

Osservo che $e^\alpha > 1$ perché $2 < e < 3$ ed $\alpha > 0$.

Esercizio 1 Calcolare il seguente limite:

$$\lim \sqrt[n]{a^n + 2^n} = ? \qquad 0 \quad R1$$

Esercizio 1 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} = ?$$

0 R1

1 R2

2 R3

3 R4

∞ R5

Confronti:

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n+3^n} \leq \sqrt[n]{3^n+3^n} = \sqrt[n]{2\cdot 3^n} = 3\cdot\sqrt[n]{2}$$

$2^n \geq 0$, $2^n \leq 3^n$

$3 \xrightarrow{n\to\infty} 3$, $\quad \sqrt[n]{2^n+3^n} \xrightarrow{n\to\infty} 3$, $\quad 3\cdot\sqrt[n]{2} \xrightarrow{n\to\infty} 3\cdot 1 = 3$

Esercizio 2 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\underset{1}{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}} + \underset{2}{\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}} + \dots + \underset{n}{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}\right)}_{= a_n} = 1.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+1/n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$\frac{1}{\sqrt{1+1/n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, $\quad a_n \xrightarrow{n\to+\infty} 1$, $\quad \frac{1}{n^2} \to 0$, $\quad \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$