# ANALISI MATEMATICA 1

**Area dell'Ingegneria dell'Informazione**

## Appello del 3.02.2014

# TEMA 1

**Esercizio 1** Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{\log|x| - 1}\right).$$

1) Determinare il dominio e discutere l'eventuale simmetria ed il segno di $f$.
2) Calcolare i limiti significativi di $f$, determinarne gli asintoti e discuterne brevemente la continuità.
3) Calcolare $f'$ e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di $f$.
4) Calcolare i limiti significativi di $f'$ e studiare la derivabilità di $f$ in $x = 0$.
5) Disegnare un grafico di $f$ (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

*Svolgimento.*

1) Il dominio é dato da $\log|x| \neq 1$ e $x \neq 0$ cioè

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq \{\pm \mathrm{e} \ \cup \ 0\}\}$$

Poiché $f(x) = -f(x)$ la funzione è dispari. Inoltre $f > 0$ se e solo se $\frac{x}{\log|x|-1} > 0$ cioè $f(x) > 0$ se e solo se $x \in (-\mathrm{e}, 0) \cup (\mathrm{e}, +\infty)$

2) I limiti significativi sono

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to \mathrm{e}^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to \mathrm{e}^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to -\mathrm{e}^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to -\mathrm{e}^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}$$

quindi la funzione ha un asintoto orizzontale destro di equazione $y = \frac{\pi}{2}$ ed uno sinistro di equazione $y = -\frac{\pi}{2}$. Ha una discontinuità eliminabile in 0 (ponendo $f(0) = 0$) ed una discontinuità di salto (non eliminabile)in $\pm\mathrm{e}$. Per altri valori la funzione è continua perché composizione di funzioni continue.

3) Per $x \in \mathcal{D}$ abbiamo

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{\log|x|-1}\right)^2} \frac{2(\log|x| - 1) - \frac{2x}{x}}{(\log|x| - 1)^2} = 2\frac{\log|x| - 2}{(\log|x| - 1)^2 + 4x^2}$$

Quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $\log|x| > 2$ cioè la funzione è strettamente crescente in $x \in (-\infty, -\mathrm{e}^2) \cup (\mathrm{e}^2, +\infty)$. I punti $x_1 = \mathrm{e}^2$ e $x_2 = -\mathrm{e}^2$ sono rispettivamente di minimo e massimo relativo. Non ci sono punti di min e max assoluti.

4) L'unico limite significativo di $f'$ (attacco) è in $x_o = 0$. Calcoliamo quindi

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$$

perché il denominatore è un infinito di ordine 2 mentre il numeratore è di ordine 1 (rispetto a $\log|x|$) per $|x| \to 0$. Perciò la funzione prolungata è in realtà $C^1$ in 0.

5) Il grafico di $f$ è in figura.

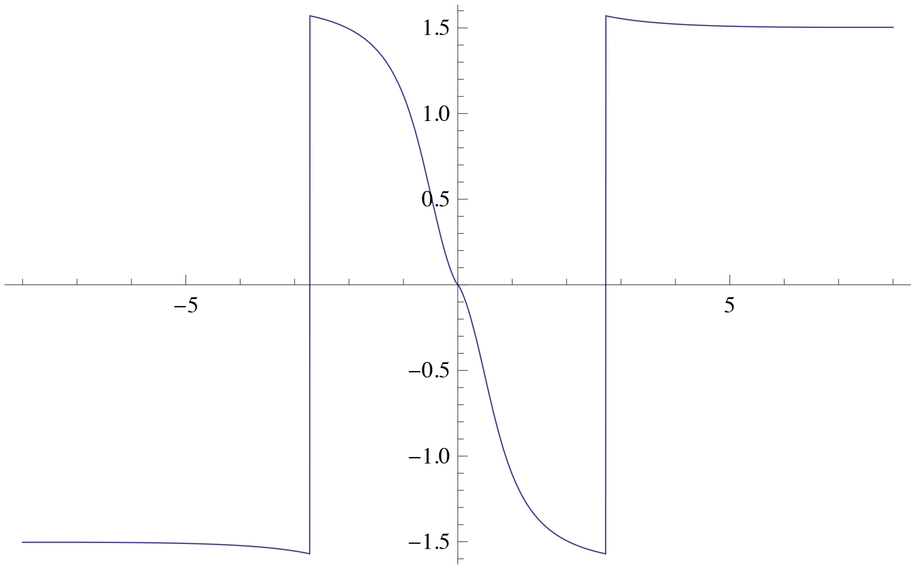


Figura 1: Il grafico di $f$ (Tema 1).

**Esercizio 2** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh x^\alpha - \cos(\sqrt{x})\log(1+\sin x)}{\log\cos 2x + x^3 \log x}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

*Svolgimento:* Sviluppando in un intorno di zero il denominatore abbiamo

$$\log\cos 2x = \log\left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right) = -2x^2 + o(x^2)$$

e poiché $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3\log x}{x^2} = 0$ il denominatore può essere scritto come

$$-2x^2 + o(x^2)$$

Al numeratore ricordando che $\sin x = x + o(x^2)$ e che $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$ abbiamo

$$\cos(\sqrt{x})\log(1+\sin x) = \left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right)\left(\sin x - \frac{(\sin x)^2}{2} + o(x^2)\right) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x - x^2 + o(x^2)$$

e quindi se $\alpha < 1$ il numeratore diventa $x^\alpha + o(x^\alpha)$ e per il PSI il limite diventa $-\infty$. Se $\alpha > 1$ il numeratore diventa $-x + o(x)$ e quindi sempre per il PSI il limite è uguale a $+\infty$. Infine se $\alpha = 1$ il numeratore diventa $x^2 + o(x^2)$ e per il PSI il limite vale $-\dfrac{1}{2}$. Ricapitolando abbiamo ottenuto che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh x^\alpha - \cos(\sqrt{x}) \log(1+\sin x)}{\log\cos 2x + x^3 \log x} = \begin{cases} = -\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ = +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ = -\frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

**Esercizio 3** Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(x+2)^{\frac{\alpha-1}{2}}(4+x)^{2\alpha}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.
*Svolgimento.* La funzione è continua in $[0, +\infty[$. Per $x \to +\infty$ la funzione è asintotica a

$$\frac{\pi}{2x^{\frac{\alpha-1}{2}+2\alpha}}$$

e quindi per avere convergenza dobbiamo porre $\frac{\alpha-1}{2} + 2\alpha > 1$ cioè $\alpha > \frac{3}{5}$. Poiché l'integrando è $> 0$ e continuo in tutti gli altri punti di $\mathbb{R}^+$ possiamo concludere che l'integrale converge per $\alpha \in \left(\dfrac{3}{5}, +\infty\right)$ e diverge a $+\infty$ per gli altri valori di $\alpha$. Calcoliamo ora

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(4+x)^2} dx$$

Integriamo per parti

$$= -\frac{1}{4+x}\arctan x\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{4+x}\frac{1}{1+x^2}\right) dx = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{17}\left(\int_0^M \frac{1}{4+x}dx + \int_0^M \frac{-x+4}{x^2+1}dx\right)$$

dove abbiamo usato la decomposizione $\dfrac{1}{(x+4)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+4} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ e calcolato i coefficienti trovando $A = \dfrac{1}{17}$, $B = -\dfrac{1}{17}$ e $C = \dfrac{4}{17}$. Dobbiamo quindi calcolare

$$\frac{1}{17}\lim_{M\to+\infty}\left(\log(4+x) - \frac{1}{2}\log(x^2+1)\Big|_0^M + 4\arctan M\right)$$

cioè semplificando

$$\frac{1}{17}\lim_{M\to+\infty}\left(\log\frac{M+4}{\sqrt{M^2+1}} + 4\arctan M\right) - \frac{1}{17}\log 4 = \frac{2}{17}\pi - \frac{2}{17}\log 2.$$

**Esercizio 4** Sia $f(z) = 2iz^2$, $z \in \mathbb{C}$. Sia $A = \{\alpha(1+i) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Si determinino l'insieme $A_1 = \{f(z) : z \in A\}$ e l'insieme $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : f(z) \in A\}$ e li si rappresentino nel piano di Gauss.
*Svolgimento.* Per trovare l'insieme $A_1$ troviamo l'immagine di $f(\alpha(1+i)) = 2i(\alpha(1+i)^2) = 2i\alpha^2(2i) = -4\alpha^2$ cioè $\mathbb{R}_o^-$. Per trovare $A_2$ dobbiamo trovare gli $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano $2iz^2 = \alpha(1+i)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Dobbiamo

quindi calcolare le radici quadrate complesse di $\frac{\alpha}{2}(1-i)$ cioè di $\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$. Se $\alpha\geq 0$ otteniamo come soluzioni gli $z\in\mathbb{C}$ tali che $z=\pm\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)$ i.e gli $z=x+iy$ tali che $y=mx$ dove $m=-\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Se $\alpha<0$ le soluzioni sono gli $z\in\mathbb{C}$ che soddisfano

$$z=\sqrt{\frac{-\alpha}{2}}\sqrt{-\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}=\pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

cioè la retta di equazione $y=mx$ con $m=-\tan\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{2}\right)$ perpendicolare alla precedente. Entrambi gli insiemi sono rappresentati in figura:

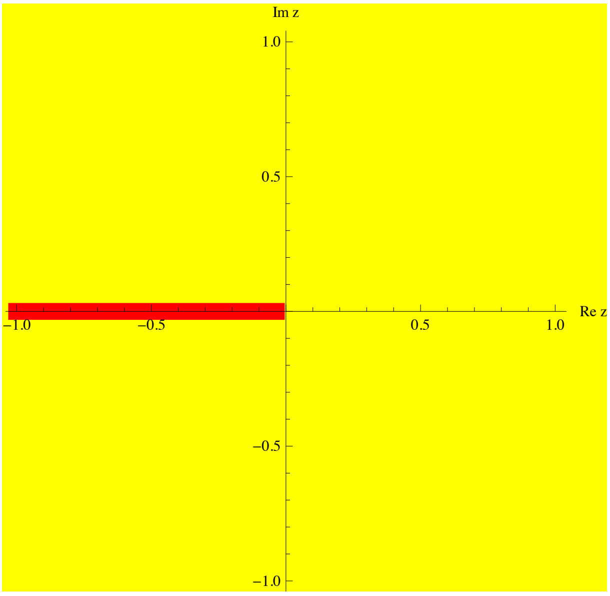


Figura 2: Insieme $A_1$ Tema 1

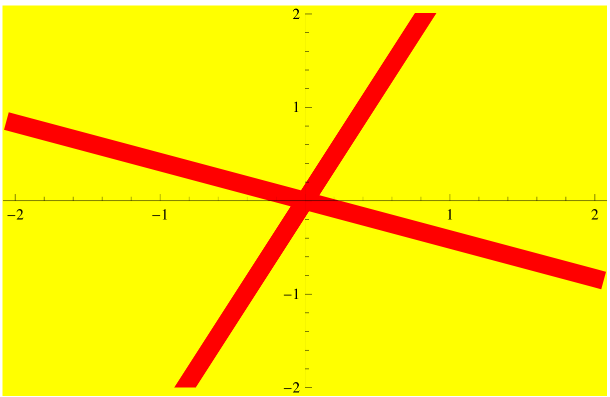


Figura 3: Insieme $A_2$ Tema 1

**Esercizio 5 [facoltativo]** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x^\alpha+1}dx\right)^2$$

al variare di $\alpha > 0$.
*Svolgimento.* Si ha

$$\Big(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x^\alpha+1}dx\Big)^2 \le \Big(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{n^\alpha\pi^\alpha+1}dx\Big)^2 = \Big(\frac{2}{n^\alpha\pi^\alpha+1}\Big)^2 \sim \frac{4}{\pi^{2\alpha}}\frac{1}{n^{2\alpha}},$$

quindi la serie converge se $\alpha > 1/2$.
Si ha inoltre

$$\Big(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x^\alpha+1}dx\Big)^2 \ge \Big(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(n+1)^\alpha\pi^\alpha+1}dx\Big)^2 = \Big(\frac{2}{(n+1)^\alpha\pi^\alpha+1}\Big)^2 \sim \frac{4}{\pi^{2\alpha}}\frac{1}{n^{2\alpha}}$$

e la serie con questo termine generale diverge se $\alpha \le 1/2$. Quindi la serie data converge se e solo se $\alpha > 1/2$.

# TEMA 2

**Esercizio 1** Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{3x}{\log|x| - 2}\right).$$

1) Determinare il dominio e discutere l'eventuale simmetria ed il segno di $f$.

2) Calcolare i limiti significativi di $f$, determinarne gli asintoti e discuterne brevemente la continuità.

3) Calcolare $f'$ e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di $f$.

4) Calcolare i limiti significativi di $f'$ e studiare la derivabilità di $f$ in $x = 0$.

5) Disegnare un grafico di $f$ (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

*Svolgimento.* Il dominio è $x \neq 0$ e inoltre $\log|x| \neq 2$, cioè $x \neq \pm e^2$. La funzione $f$ è visibilmente dispari. In definitiva, $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, x \neq e^2, x \neq -e^2\}$. Il segno di $f$ è il segno dell'argomento dell'arcotangente, cioè $f(x) \geq 0$ se e solo se $x$ e $\log|x| - 2$ hanno lo stesso segno, cioè se e solo se $x > e^2$ oppure $x < -e^2$.
Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, perché $\lim_{x\to+\infty} 3x/(\log|x| - 2) = +\infty$ e analogamente $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\pi/2$. Si ha inoltre $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to e^{2+}} f(x) = \pi/2 = -\lim_{x\to e^{2-}} f(x)$, mentre $\lim_{x\to -e^{2+}} f(x) = \pi/2 = -\lim_{x\to -e^{2-}} f(x)$ (entrambi i punti sono discontinuità di salto). Siccome $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $f$ è prolungabile con continuità a $x = 0$ ponendo $f(0) = 0$.
Inoltre $f$ è derivabile nel suo dominio (e $x \neq 0$) e si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{9x^2}{(\log|x|-2)^2}} \frac{3(\log|x| - 2) - 3}{(\log|x| - 2)^2} = \frac{3(\log|x| - 3)}{(\log|x| - 2)^2 + 9x^2}.$$

Il segno di $f'$ è perciò positivo se e solo se $x > e^3$ oppure $x < -e^3$. Quindi $e^3$ è un minimo e $-e^3$ è un massimo.
Si ha:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3\log|x|\left(1 - \frac{3}{\log|x|}\right)}{\log^2|x|\left(\left(1 - \frac{2}{\log|x|}\right)^2 + \frac{9x^2}{\log|x|^2}\right)} = 0,$$

per cui (la prolungata di) $f$ è derivabile in 0 con derivata nulla e 0 risulta un punto di flesso a tangente orizzontale. Si ha inoltre $\lim_{x\to\pm e^2} f'(x) = -1/3e^4$. Ovviamente $f$ non è derivabile in $\pm e^2$ perché è discontinua. Semplicemente le tangenti da destra e da sinistra hanno lo stesso coefficiente angolare.
Il grafico di $f$ è in figura.

**Esercizio 2** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x^\alpha + \cosh(\sqrt{x})\log(1 - \sinh x)}{\log\cosh 3x + x^3 \log x}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.
*Svolgimento.* Osserviamo prima che $\sin x^\alpha = x^\alpha + o(x^{2\alpha})$ per $x \to 0^+$. Si ha inoltre, per $x \to 0^+$,

$$\cosh\sqrt{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)$$

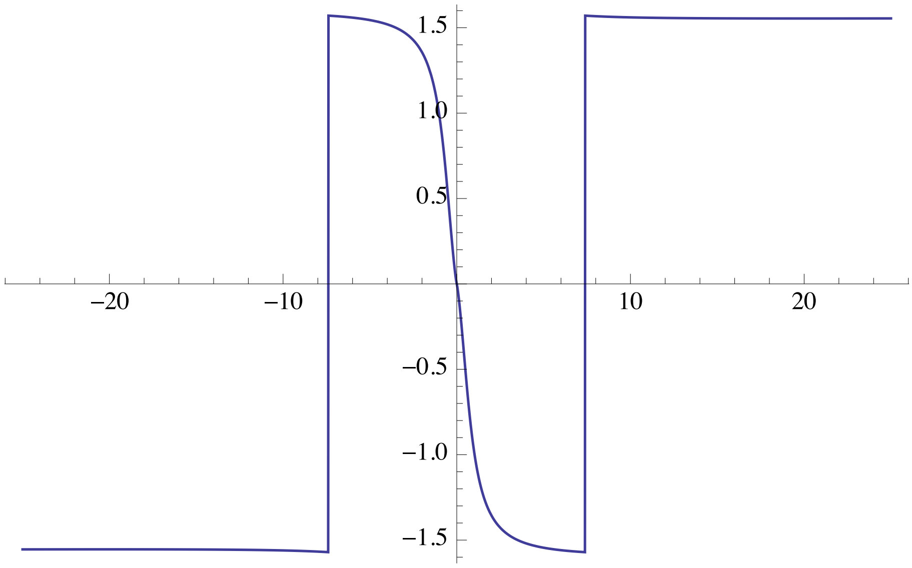

Figura 4: Il grafico di $f$ (Tema 2).

e

$$\log(1-\sinh x) = -\sinh x - \frac{\sinh^2 x}{2} + o(x^2) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

per cui

$$\cosh(\sqrt{x})\log(1-\sinh x) = (1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{24}+o(x^2))(-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)) = -x-x^2+o(x^2).$$

Quindi, detto $n(x)$ il numeratore del limite da calcolare, si ha, per $x \to 0^+$,

$$\begin{aligned} &n(x) \sim x^\alpha \qquad \text{se} \quad \alpha < 1 \\ &n(x) \sim -x \qquad \text{se} \quad \alpha > 1 \\ &n(x) \sim \sin x - x - x^2 + o(x^2) = -x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Per il denominatore osserviamo innanzitutto che, per $x \to 0$, si ha $\log\cosh 3x = \log\big(1+\cosh 3x - 1\big) = \cosh 3x - 1 + o(\cosh 3x - 1) = 9x^2/2 + o(x^2)$.
In definitiva si ha che il limite richiesto è

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha + o(x^\alpha)}{9x^2/2 + o(x^2)} = +\infty \qquad \text{se} \;\; 0<\alpha<1 \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{9x^2/2 + o(x^2)} = -2/9 \qquad \text{se} \;\; \alpha = 1 \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x + o(x)}{x^2/2 + o(x^2)} = -\infty \qquad \text{se} \;\; \alpha > 1. \end{aligned}$$

**Esercizio 3** Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan 2x}{(x+3)^{\frac{\alpha-1}{3}}(x+2)^{2\alpha}}\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.
*Svolgimento.* Detto $g(x)$ l'integrando, si ha che $g$ è continua in $[0, +\infty[$ e inoltre

$$g(x) \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^{\frac{\alpha-1}{3}+2\alpha}} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^{\frac{7\alpha-1}{3}}}$$

per $x \to +\infty$. L'integrale quindi è convergente a $+\infty$ se e solo se $\frac{7\alpha-1}{3} > 1$, cioè se e solo se $\alpha > 4/7$. Calcoliamo ora una primitiva di $g$ per $\alpha = 1$. Si ha

$$\begin{aligned}
\int \frac{\arctan 2x}{(x+2)^2}\,dx &= \text{(per parti)} = -\frac{\arctan 2x}{x+2} + 2\int \frac{1}{(x+2)(1+4x^2)}dx \\
&= \text{(per scomposizione in fratti semplici)} \\
&= -\frac{\arctan 2x}{x+2} + 2\Big(\int \frac{1/17}{x+2}dx + \int \frac{-4/17x + 8/17}{1+4x^2}dx\Big) \\
&= -\frac{\arctan 2x}{x+2} + \frac{2}{17}\log|x+2| - \frac{1}{17}\Big(\int \frac{8x}{1+4x^2}dx - \int \frac{16}{1+4x^2}dx\Big) \\
&= -\frac{\arctan 2x}{x+2} + \frac{2}{17}\log|x+2| - \frac{1}{17}\log(1+4x^2) + \frac{8}{17}\arctan(2x) + c.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\arctan 2x}{(x+2)^2}\,dx &= \lim_{x\to+\infty}\Big(-\frac{\arctan 2x}{x+2} + \frac{2}{17}\log|x+2| - \frac{1}{17}\log(1+4x^2) + \frac{8}{17}\arctan(2x)\Big) - \frac{2}{17}\log 2 \\
&= \frac{4\pi}{17} - \frac{2}{17}\log 2 + \frac{1}{17}\lim_{x\to+\infty}\log\frac{(x+2)^2}{4x^2+1} \\
&= \frac{4\pi}{17} - \frac{2}{17}\log 4.
\end{aligned}$$

**Esercizio 4** Sia $f(z) = 4iz^2$, $z \in \mathbb{C}$. Sia $A = \{\alpha(1-i) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Si determinino l'insieme $A_1 = \{f(z) : z \in A\}$ e l'insieme $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : f(z) \in A\}$ e li si rappresentino nel piano di Gauss.
*Svolgimento.* $A_1 = \{4i(\alpha(1-i))^2 : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{8\alpha^2 : \alpha \in \mathbb{R}\}$, cioè il semiasse delle ascisse $\geq 0$. Inoltre

$$A_2 = \big\{z \in \mathbb{C} : \text{esiste } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tale che } 4iz^2 = \alpha(1-i)\big\} = \big\{z \in \mathbb{C} : \text{esiste } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tale che } z^2 = \frac{\alpha}{4}e^{-\frac{3}{4}\pi i}\big\}.$$

Per determinare $A_2$ bisogna quindi calcolare le radici quadrate di $\frac{\alpha}{4}e^{-\frac{3}{4}\pi i}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha \geq 0$ si ha $z = \pm\frac{\sqrt{\alpha}}{2}e^{-\frac{3}{8}\pi i}$, mentre se $\alpha < 0$, si ha $z = \pm\frac{\sqrt{-\alpha}}{2}e^{\frac{\pi}{8}i}$. Entrambi gli insiemi sono rappresentati in figura.

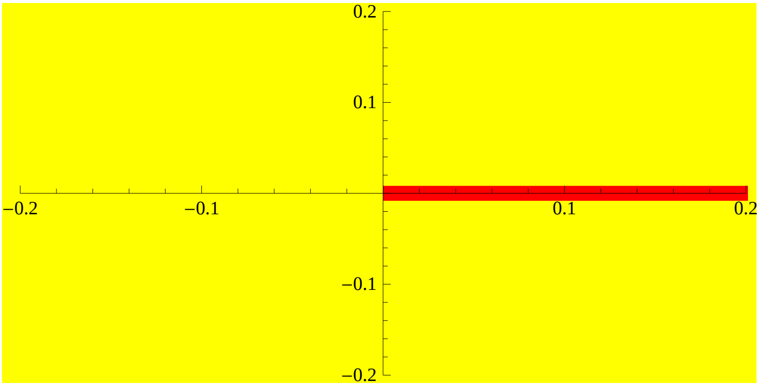


Figura 5: Insieme $A_1$ Tema 2

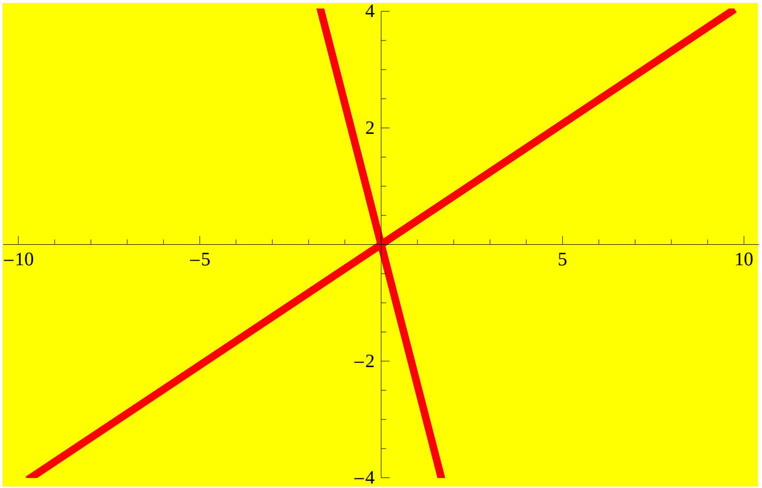


Figura 6: Insieme $A_2$ Tema 2

**Esercizio 5 [facoltativo]** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha + 1} dx \right)^2$$

al variare di $\alpha > 0$.
Per lo svolgimento si veda il Tema 1.

# TEMA 3

**Esercizio 1** Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{4 - \log|x|}\right).$$

1) Determinare il dominio e discutere l'eventuale simmetria ed il segno di $f$.
2) Calcolare i limiti significativi di $f$, determinarne gli asintoti e discuterne brevemente la continuità.
3) Calcolare $f'$ e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di $f$.
4) Calcolare i limiti significativi di $f'$ e studiare la derivabilità di $f$ in $x = 0$.
5) Disegnare un grafico di $f$ (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

*Svolgimento.* $\mathrm{Dom}f = \{x \in \mathbb{R},\, x \neq 0,\, x \neq \mathrm{e}^4\}$.

Funzione dispari.

Segno: $f(x) > 0 \iff 0 < x < \mathrm{e}^4$ e per $x < -\mathrm{e}^4$.

Limiti:

$$\begin{array}{l}\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \lim_{x\to \mathrm{e}^4+} f(x) = -\pi/2, \lim_{x\to \mathrm{e}^4-} f(x) = \pi/2 \\ \lim_{x\to -\mathrm{e}^4+} f(x) = -\pi/2, \lim_{x\to -\mathrm{e}^4-} f(x) = \pi/2 \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\pi/2,\ \lim_{x\to -\infty} f(x) = \pi/2.\end{array}$$

Asintoti: $y = \pi/2$ è asintoto orizzontale sinistro, $y = -\pi/2$ è asintoto orizzontale destro.

Continuità: la funzione è prolungabile per continuità in $x = 0$ con valore $f(0) = 0$. È discontinua, con discontinuità di salto in $x = \pm\mathrm{e}^4$.

Derivabilità:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{4-\log|x|}\right)^2} \frac{4 - \log|x| + 1}{(4 - \log|x|)^2} \quad \text{per } x \neq 0,\ x \neq \pm\mathrm{e}^4.$$

Segno della derivata:

$f'(x) > 0 \iff 5 - \log|x| > 0 \iff -\mathrm{e}^4 < x < \mathrm{e}^4,\ \mathrm{e}^4 < x < \mathrm{e}^5$ e $x < -\mathrm{e}^5$.

Quindi $f(x)$ è crescente per $-\mathrm{e}^4 < x < \mathrm{e}^4$, per $\mathrm{e}^4 < x < \mathrm{e}^5$ e per $x < -\mathrm{e}^5$.

Punti di estremo: $x = \mathrm{e}^5$ è punto di massimo locale e $f(\mathrm{e}^5) = -\arctan(\mathrm{e}^5)$, $x = -\mathrm{e}^5$ è punto di minimo locale e $f(-\mathrm{e}^5) = \arctan(\mathrm{e}^5)$.

Si ha $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ quindi l'origine è un punto di flesso a tangente orizzontale. Inoltre $\lim_{x\to \pm\mathrm{e}^4+} f'(x) = 1/\mathrm{e}^8$, $\lim_{x\to \pm\mathrm{e}^4-} f'(x) = 1/\mathrm{e}^8$.

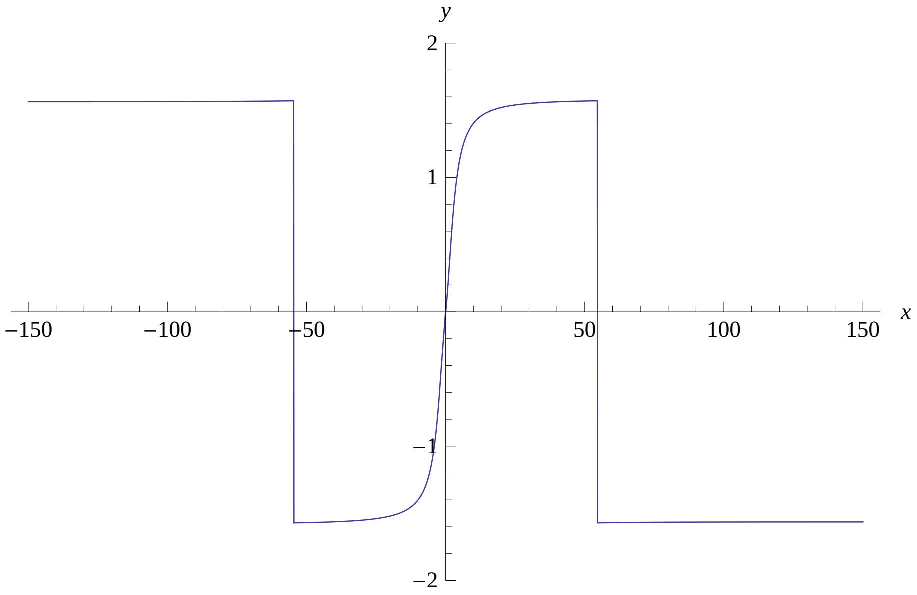


Figura 7: Il grafico di $f$ (Tema 3)

**Esercizio 2** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\sqrt{x})\log(1+\sin x) - \sin x^\alpha}{\log\cos\frac{x}{2} + x^3\log x}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

*Svolgimento.* Si ha per $x \to 0$

$$\cos(\sqrt{x})\log(1+\sin x) = \left(1 - \frac{(\sqrt{x})^2}{2} + o(x)\right)\left(\sin x - \frac{(\sin x)^2}{2} + o(x^2)\right) =$$

$$\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) = x - x^2 + o(x^2)$$

$$\log\cos\frac{x}{2} = \log\left(\cos\frac{x}{2} - 1 + 1\right) = \cos\frac{x}{2} - 1 + o(\cos\frac{x}{2} - 1) = \cos\frac{x}{2} - 1 + o(x^2) = -\frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

$$\sin(x^\alpha) = x^\alpha + o(x^{2\alpha})$$

e $x^3\log x = o(x^2)$. Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\sqrt{x})\log(1+\sin x) - \sin x^\alpha}{\log\cos\frac{x}{2} + x^3\log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - x^2 + o(x^2) - x^\alpha + o(x^\alpha)}{-\frac{x^2}{8} + o(x^2)}$$

e quindi si ha, per il principio di sostituzione,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\sqrt{x})\log(1+\sin x) - \sin x^\alpha}{\log\cos\frac{x}{2} + x^3\log x} = \begin{cases} \lim_{x\to 0} \frac{-x^\alpha}{-\frac{x^2}{8}} = +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1, \\ \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{-\frac{x^2}{8}} = 8 & \text{se } \alpha = 1, \\ \lim_{x\to 0} \frac{x}{-\frac{x^2}{8}} = -\infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

**Esercizio 3** Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan 2x}{(x+1)^{2(\alpha-1)}(x+3)^{2\alpha}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

*Svolgimento.* $f(x) = \frac{\arctan 2x}{(x+1)^{2(\alpha-1)}(x+3)^{2\alpha}}$ è continua in $[0, +\infty[$. Per $x \to +\infty$ si ha $f(x) \sim \frac{\pi}{2x^{4\alpha-2}}$ e quindi l'integrale esiste finito se e solo se $4\alpha - 2 > 1 \iff \alpha > \frac{3}{4}$.
Per $\alpha = 1$ si ha integrando per parti

$$\int \frac{\arctan 2x}{(x+3)^2}\, dx = -\frac{\arctan 2x}{x+3} + \int \frac{2}{(x+3)(1+4x^2)}\, dx =$$

$$= -\frac{\arctan 2x}{x+3} + \int \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{1+4x^2}\, dx = (\text{per scomposizione in fratti semplici}) =$$

$$\int \frac{\arctan 2x}{(x+3)^2}\, dx = -\frac{\arctan 2x}{x+3} + \frac{2}{37}\int \frac{1}{x+3}\, dx - \frac{8}{37}\int \frac{x}{1+4x^2}\, dx + \frac{24}{37}\int \frac{1}{1+4x^2}\, dx =$$

$$= -\frac{\arctan 2x}{x+3} + \frac{2}{37}\log|3+x| - \frac{1}{37}\log(1+4x^2) + \frac{12}{37}\arctan(2x) =$$

$$= -\frac{\arctan 2x}{x+3} + \frac{1}{37}\log\frac{(3+x)^2}{(1+4x^2)} + \frac{12}{37}\arctan(2x).$$

Quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan 2x}{(x+3)^2}\, dx = \lim_{x\to+\infty} -\frac{\arctan 2x}{x+3} + \frac{1}{37}\log\frac{(3+x)^2}{(1+4x^2)} + \frac{12}{37}\arctan(2x)\Big]_0^x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\arctan 2x}{x+3} + \frac{1}{37}\log\frac{(3+x)^2}{(1+4x^2)} + \frac{12}{37}\arctan(2x)\right) - \frac{2}{37}\log 3 = \frac{2}{37}(3\pi - \log 6).$$

**Esercizio 4** Sia $f(z) = 2z^2/i$, $z \in \mathbb{C}$. Sia $A = \{\alpha(1-i) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Si determinino l'insieme $A_1 = \{f(z) : z \in A\}$ e l'insieme $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : f(z) \in A\}$ e li si rappresentino nel piano di Gauss.

*Svolgimento.* Passo all'espressione di $f$ in coordinate. Si ha $f(x+iy) = 2(x+iy)^2/i = -2i(x^2-y^2+2ixy) = 4xy - 2i(x^2-y^2)$. Quindi

$$A_1 = \{f(z),\ z \in A\} = \{(4xy, -2(x^2-y^2)),\ x = \alpha,\ y = -\alpha\} = \{(-4\alpha^2, 0),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

che si rappresenta col semiasse reale negativo.

Per il secondo insieme si ha

$$A_2 = \{z :\ f(z) \in A\} = \{(x,y) :\ (4xy, -2(x^2-y^2)) = (\alpha, -\alpha)\} = \{(x,y) :\ 4xy = 2(x^2-y^2)\} =$$

$$= \{(x,y) :\ \frac{y}{x} = (-1 \pm \sqrt{2})\} \cup \{(0,0)\}$$

che si rappresenta con due rette per 0.

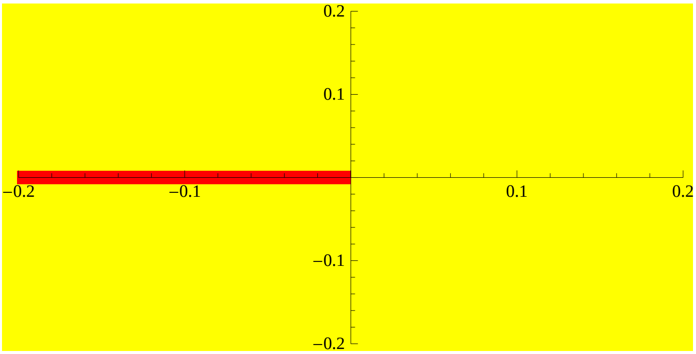


Figura 8: Insieme $A_1$ Tema 3

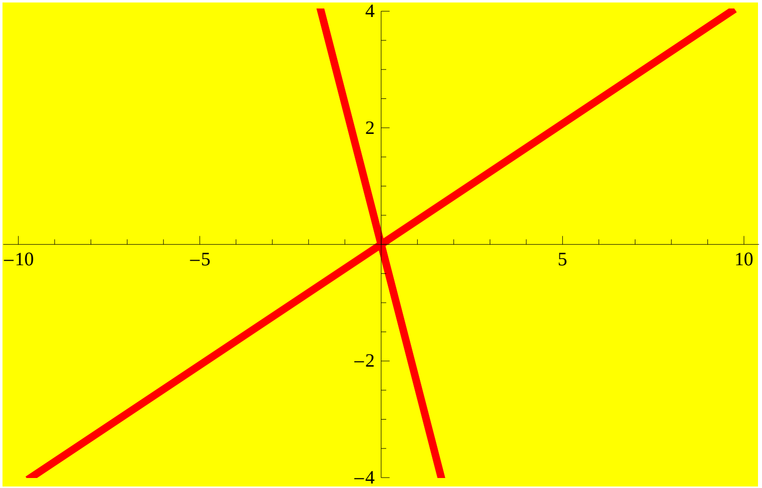


Figura 9: Insieme $A_2$ Tema 3

**Esercizio 5 [facoltativo]** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha + 1} dx \right)^2$$

al variare di $\alpha > 0$.

*Svolgimento.* Per lo svolgimento si veda il Tema1.

# TEMA 4

**Esercizio 1 [9 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{2-\log|x|}\right).$$

1) Determinare il dominio e discutere l'eventuale simmetria ed il segno di $f$.
2) Calcolare i limiti significativi di $f$, determinarne gli asintoti e discuterne brevemente la continuità.
3) Calcolare $f'$ e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di $f$.
4) Calcolare i limiti significativi di $f'$ e studiare la derivabilità di $f$ in $x = 0$.
5) Disegnare un grafico di $f$ (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

*Soluzione.* **Dominio**. Deve essere $|x| \neq 0$, per l'esistenza del logaritmo. Deve essere $2 - \log|x| \neq 0$ per l'esistenza del quoziente, ovvero

$$\log|x| \neq 2 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \neq \mathrm{e}^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \pm\mathrm{e}^2.$$

In conclusione, il dominio di $f$ è l'insieme

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0,\, x \neq \pm\mathrm{e}^2\}.$$

**Simmetrie**. Per $x \in D(f)$ si ha

$$f(-x) = \arctan\left(\frac{-2x}{2-\log|-x|}\right) = -\arctan\left(\frac{2x}{2-\log|x|}\right) = -f(x),$$

avendo usato il fatto che l'arcotangente è una funzione dispari. Dunque, $f$ è dispari e nel seguito è sufficiente studiare la funzione nel caso $x > 0$.

**Segno**. Si ha

$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \arctan\left(\frac{2x}{2-\log|x|}\right) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{2-\log|x|} > 0.$$

Lo studio del segno del numeratore e del denominatore porta alla seguente conclusione

$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -\mathrm{e}^2) \cup (0, \mathrm{e}^2).$$

**Limiti**. Ecco i limiti significativi

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \arctan\left(\frac{2x}{2-\log|x|}\right) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to(\mathrm{e}^2)^+} f(x) = \lim_{x\to(\mathrm{e}^2)^+} \arctan\left(\frac{2\mathrm{e}^2}{0^-}\right) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to(\mathrm{e}^2)^-} f(x) = \lim_{x\to(\mathrm{e}^2)^-} \arctan\left(\frac{2\mathrm{e}^2}{0^+}\right) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \arctan\left(\frac{0}{\pm\infty}\right) = \arctan(0) = 0.$$

**Asintoti**. Retta $y = -\pi/2$ asintoto orizzontale destro. Retta $y = \pi/2$ asintoto arizzontale sinistro.

**Continuità**. La funzione è continua nel dominio $D(f)$ essendo composizione e quoziente di funzioni continue. Osserviamo che ponendo

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0,$$

si ottiene un prolungamento continuo anche nel punto $x = 0$. I punti $x = \pm e^2$ sono punti di salto.

**Derivabilità**. $f$ è derivabile in tutto $D(f)$. Il punto $x = 0$ è da esaminare meglio.

**Derivata**. Per $x \neq 0$ e $x \neq \pm e^2$ possiamo calcolare

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{2-\log|x|}\right)^2} \cdot \frac{2(2 - \log|x|) - 2x \cdot (-1/x)}{(2 - \log|x|)^2} \\ &= \frac{6 - 2\log|x|}{(2 - \log|x|)^2 + 4x^2}. \end{aligned}$$

**Intervalli di monotonia**. Studiamo il segno della derivata:

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6 - 2\log|x| \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -e^3 \leq x \leq e^3.$$

Ricordiamo che nel dominio si ha $x \neq \pm e^2$. Quindi limitatamente ad $x > 0$ si hanno i seguenti intervalli di monotonia:

– $f$ cresce sull'intervallo $(0, e^2)$;
– $f$ cresce sull'intervallo $(e^2, e^3)$;
– $f$ decresce sull'intervallo $(e^3, \infty)$.

Osservazione: $f$ non è crescente su tutto $(0, e^3) \setminus \{e^2\}$.

**Limiti di $f'$.** Abbiamo i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{6 - 2\log|x|}{(2 - \log|x|)^2 + 4x^2} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{\frac{(2-\log|x|)^2}{6-2\log|x|} + \frac{4x^2}{6-2\log|x|}} = \frac{1}{\infty + 0} = 0.$$

Quindi il punto $x = 0$ è un punto a tangente orizzontale. In particolare $f$ è derivabile in $x = 0$.

$$\lim_{x\to (e^2)^\pm} f'(x) = \lim_{x\to (e^2)^\pm} \frac{6 - 2\log|x|}{(2 - \log|x|)^2 + 4x^2} = \frac{6 - 4}{4e^4} = \frac{1}{2e^4}.$$

Dunque la funzione arriva da sinistra e riparte verso destra nel punto $x = e^2$ con la stessa direzione tangente (ma, attenzione, c'è un salto). Per simmetria, lo stesso accade nel punto $x = -e^2$.

**Grafico.** Ecco un grafico approssimativo della funzione:

**Punti di estremo.** Il punto $x = e^3$ è un punto di massimo locale non assoluto. Il punto $x = -e^3$ è un punto di minimo locale non assoluto. Non ci sono altri punti di estremo.

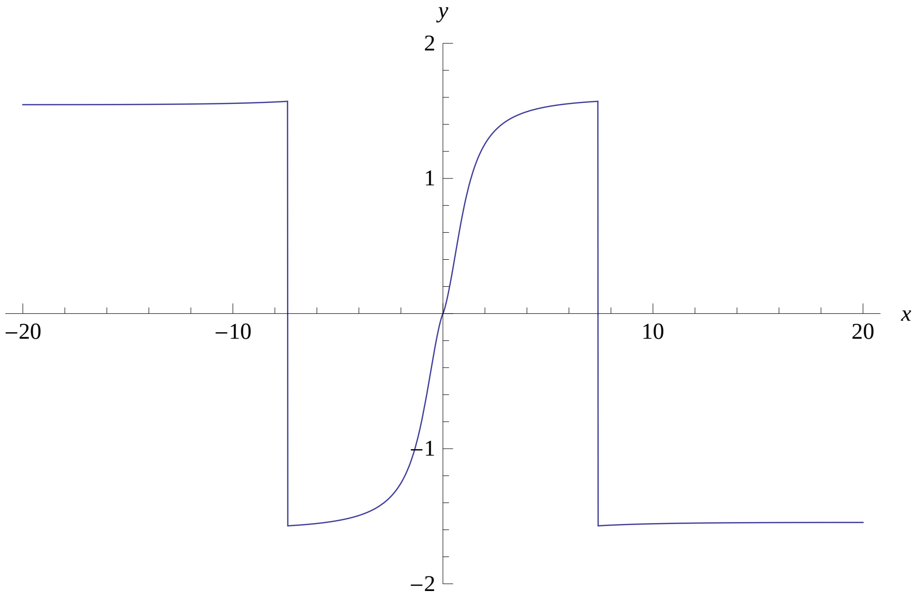


Figura 10: Il grafico di $f$ (Tema 4)

**Esercizio 2 [9 punti]** Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cosh(\sqrt{x}) \log(1 - \sin x) + \sin x^\alpha}{\log \cosh \sqrt{2}x + x^3 \log x}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

*Soluzione.* Questo limite si calcola con gli sviluppi. Iniziamo ad esaminare il denominatore. Dallo sviluppo elementare

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0,$$

si trova

$$\cosh(\sqrt{2}x) = 1 + x^2 + o(x^2).$$

Dallo sviluppo del logaritmo

$$\log(1 + x) = x + o(x), \quad x \to 0,$$

si trova con la regola di sostituzione

$$\begin{aligned} \log \cosh(\sqrt{2}x) &= \log(1 + \cosh(\sqrt{2}x) - 1) = \cosh(\sqrt{2}x) - 1 + o(\cosh(\sqrt{2}x) - 1) \\ &= (\cosh(\sqrt{2}x) - 1)(1 + o(1)) = (x^2 + o(x^2))(1 + o(1)) = x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

In conclusione, il denominatore ha il seguente sviluppo

$$D(x) = \log \cosh \sqrt{2}x + x^3 \log x = x^2 + o(x^2) + x^3 \log x = x^2 + o(x^2),$$

dove abbiamo usato il fatto che $x^3 \log x = o(x^2)$ per $x \to 0^+$.

Passiamo allo sviluppo del numeratore. Dallo sviluppo elementare

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \quad x \to 0,$$

si trova

$$\sin(x^\alpha) = x^\alpha - \frac{x^{3\alpha}}{3!} + o(x^{3\alpha}), \quad x \to 0^+.$$

Poi si ha

$$\cosh\sqrt{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} + o(x^2), \quad x \to 0^+.$$

Partiamo ora da uno sviluppo preciso fino al secondo ordine del logaritmo:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0,$$

da cui si trova, con la regola di sostituzione,

$$\begin{aligned}
\log(1-\sin x) &= -\sin x - \frac{(-\sin x)^2}{2} + o(\sin^2 x) \\
&= -(x - x^3/3! + o(x^3)) - \frac{1}{2}(x - x^3/3! + o(x^3))^2 + o(x^2) \\
&= -x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).
\end{aligned}$$

In definitiva, il numeratore ha il seguente sviluppo:

$$\begin{aligned}
N(x) &= \cosh(\sqrt{x})\log(1-\sin x) + \sin x^\alpha \\
&= \Big(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} + o(x^2)\Big)\Big(-x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\Big) + x^\alpha - \frac{x^{3\alpha}}{3!} + o(x^{3\alpha}) \\
&= -x - x^2 + o(x^2) + x^\alpha - \frac{x^{3\alpha}}{3!} + o(x^{3\alpha}).
\end{aligned}$$

L'andamento del numeratore dipende dal valore di $\alpha$, e precisamente si ha:

$$N(x) = \begin{cases} x^\alpha + o(x^\alpha) & \text{se } 0 < \alpha < 1, \\ -x^2 + o(x^2) & \text{se } \alpha = 1, \\ -x + o(x) & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Dunque, il limite vale:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{N(x)}{D(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha + o(x^\alpha)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2-\alpha}}\frac{1+o(1)}{1+o(1)} = +\infty, \quad \text{se } 0 < \alpha < 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{N(x)}{D(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1+o(1)}{1+o(1)} = -1, \quad \text{se } \alpha = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{N(x)}{D(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x + o(x)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\frac{-1+o(1)}{1+o(1)} = -\infty, \quad \text{se } \alpha > 1.$$

**Esercizio 3 [9 punti]** Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(x+2)^{\frac{\alpha-1}{4}}(5+x)^{2\alpha}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

*Soluzione.* Si tratta di un integrale improprio su intervallo non limitato. La funzione integranda $f(x)$ è continua su $[0, \infty)$ e inoltre

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\arctan x}{(x+2)^{\frac{\alpha-1}{4}}(5+x)^{2\alpha}} \\ &= \frac{1}{x^{\frac{\alpha-1}{4}+2\alpha}} \frac{\arctan x}{(1+2/x)^{\frac{\alpha-1}{4}}(1+5/x)^{2\alpha}} \\ &= \frac{1}{x^{\frac{9\alpha-1}{4}}} \frac{\arctan x}{(1+2/x)^{\frac{\alpha-1}{4}}(1+5/x)^{2\alpha}}. \end{aligned}$$

Dunque si ha

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{9\alpha-1}{4}} f(x) = \frac{\pi}{2} \neq 0,$$

e per il Criterio del confronto asintotico, l'integrale converge se e solo se

$$\frac{9\alpha - 1}{4} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > \frac{5}{9}.$$

Quando $\alpha = 1$ l'integrale diventa

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{(5+x)^2}\, dx.$$

Questo integrale si può calcolare per parti. Infatti si ha:

$$I = \int_0^\infty \frac{\arctan x}{(5+x)^2}\, dx = \Big[-(5+x)^{-1}\arctan x\Big]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty \frac{1}{(5+x)(x^2+1)} dx = \int_0^\infty \frac{1}{(5+x)(x^2+1)} dx.$$

Con la tecnica dei fratti semplici si ottiene la decomposizione

$$\frac{1}{(5+x)(x^2+1)} = \frac{1}{26}\Big(\frac{1}{x+5} + \frac{5-x}{x^2+1}\Big)$$

e quindi si trova

$$\begin{aligned} I &= \frac{5}{26}\Big[\arctan x\Big]_{x=0}^{x=\infty} + \frac{1}{26}\Big[\log|5+x| - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\Big]_{x=0}^{x=\infty} \\ &= \frac{5\pi}{52} + \frac{1}{26}\Big[\log\Big(\frac{|5+x|}{\sqrt{1+x^2}}\Big)\Big]_{x=0}^{x=\infty} \\ &= \frac{5\pi}{52} + \frac{1}{26}(\log 1 - \log 5) = \frac{1}{26}\Big(\frac{5\pi}{2} - \log 5\Big). \end{aligned}$$

**Esercizio 4 [5 punti]** Sia $f(z) = 4z^2/i$, $z \in \mathbb{C}$. Sia $A = \{\alpha(1+i) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Si determinino l'insieme $A_1 = \{f(z) : z \in A\}$ e l'insieme $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : f(z) \in A\}$ e li si rappresentino nel piano di Gauss.

*Soluzione.* Se $z \in A$, allora $z = \alpha(1+i)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e dunque

$$f(z) = \frac{4}{i}\alpha^2(1+i)^2 = 8\alpha^2.$$

Dunque si ha $A_1 = \{8\alpha^2 \in \mathbb{C} : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}z \geq 0, \mathrm{Im}z = 0\}$, semiasse positivo delle parti reali.

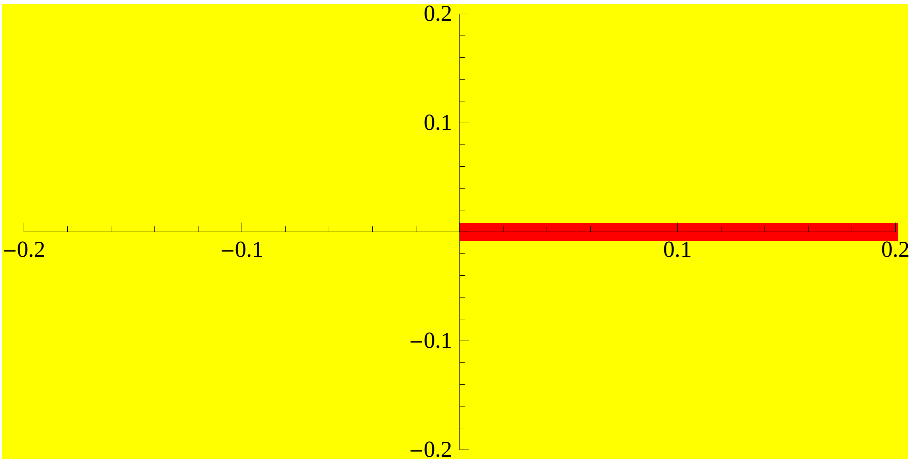


Figura 11: Insieme $A_1$ Tema 4

Determiniamo $A_2$. Osserviamo che $z \in A$ se e solo se $\mathrm{Re}z = \mathrm{Im}z$. Dunque, $f(z) \in A$ se e solo se $\mathrm{Re}f(z) = \mathrm{Im}f(z)$. Ponendo $z = x + iy$, la funzione $f$ si scrive in questo modo:

$$f(z) = \frac{4}{i}(x+iy)^2 = \frac{4}{i}(x^2 + 2ixy - y^2) = -4i(x^2 + 2ixy - y^2) = -4i(x^2 - y^2) + 8xy.$$

Dunque l'equazione $\mathrm{Re}f(z) = \mathrm{Im}f(z)$ è equivalente a

$$-4(x^2 - y^2) = 8xy \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2xy - y^2 = 0.$$

Se $y = 0$ si trova $x = 0$. Quando $y \neq 0$ possiamo porre $t = x/y$ e trovare l'equazione $t^2 + 2t - 1 = 0$ che ha le due soluzioni $t_\pm = -1 \pm \sqrt{2}$.

Dunque l'insieme $A_2$ è formato dalle due rette di equazione cartesiana

$$x + (1 + \sqrt{2})y = 0 \quad \text{e} \quad x + (1 - \sqrt{2})y = 0$$

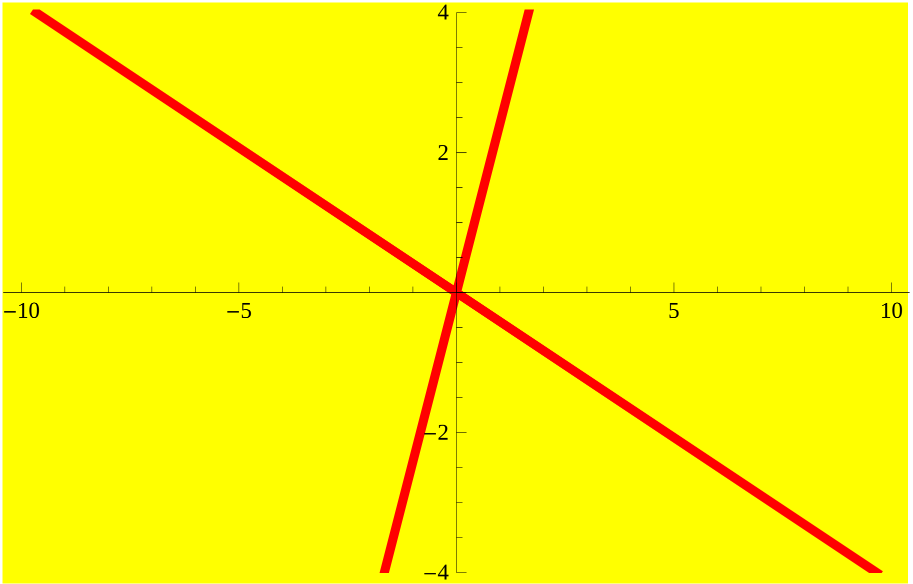


Figura 12: Insieme $A_1$ Tema 4

**Esercizio 5 [facoltativo]** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha + 1} dx \right)^2$$

al variare di $\alpha > 0$.

Per lo svolgimento si veda il Tema 1.