

Esercizio 1. Usando la definizione di limite verificare che

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^4} = -\infty, \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x+1} = 2.$$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti ‘risolvendo’ le forme indeterminate:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right); \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{(\pi-x)^2};$$
$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\alpha x) - \cos(\beta x)}{x^2}, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{x - x_0}, \text{ dove } x_0 > 0;$$

Risposte: 1) -1 ; 2) $3/2$; 3) $1/8$; 4) $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$; 5) $\frac{1}{3}x_0^{-2/3}$.

Esercizio 3. Calcolare i seguenti limiti ‘risolvendo’ le forme indeterminate del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh(2x) \log x + xe^x + \cosh(2x)}{e^x \cosh(x) \log(x+1) + x^2 \sinh x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 2^x + x^3 3^x + x^4 4^x}{3^x \log(1+3^x) + (x^2 2^x + 2)^2 + 1}.$$

Risposte: 1) 1 ; 2) 1 .

Esercizio 4. Calcolare i seguenti limiti

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan \left(\log \left(\frac{x^2}{x+1} \right) \right); \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sinh(\log(x^2+1))}{x^\alpha}, \text{ con } \alpha > 0;$$
$$3) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{1-x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\alpha x^2} + x^3 \sin \frac{1}{x}}{x^2}, \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Risposte: 1) $\pi/2$; 2) 1 se $\alpha = 2$; 3) ∞ ; 4) α .

Esercizio 5. Sviluppare le seguenti funzioni per $x \rightarrow 0$ con una precisione fino al terzo ordine:

$$1) f(x) = e^{\sinh x} - \sqrt{1+x^2};$$
$$2) g(x) = \cosh \sqrt{x} + \sin^3 x - e^{x/2}, \quad x \geq 0.$$

Risposte: 1) $f(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$; 2) $g(x) = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{353}{360}x^3 + o(x^3)$.

Esercizio 6. Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \rightarrow 0$ delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = \log(1+x)^2 - \sin(2x) + \sin(x^2)$;

2) $g(x) = \cos x + \cosh x - \frac{1}{12} \sin(x^4) - 2$.

Risposte: 1) L'ordine di f è 3; 2) L'ordine di g è 8.

Esercizio 7. Usando sviluppi infinitesimali, calcolare i seguenti limiti:

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{x^2} + 4\sqrt{x} \log(1+x)}{\cos(x^3) - 1 + \tan(x) \sin(\sqrt{x})}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \sqrt{x^5})^{1/3} - 1}{x^2(\cos(x^{1/4}) - 1)}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - \cos x}{\sin(x \log x)}$.

Risposte: 1) 4; 2) $-2/3$; 3) 1.