

Analisi Matematica 1

Foglio 8

Funzioni continue

21 Novembre 2014

Esercizio 8. Al variare del parametro $\alpha > 0$, studiare la convergenza delle serie numeriche:

$$1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \sin(1/n^\alpha) \log\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\sqrt{n+1} \arctan(n)}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \left(\sqrt[3]{1+1/n^2} - \cos(1/n) \right).$$

Risposte: 1) Converge se e solo se $\alpha > 1/2$ (Confronto asintotico); 2) Converge se e solo se $\alpha < 1$.

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti 'risolvendo' le forme indeterminate del tipo $[1^\infty]$:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x^3 + 1}{x + 2}}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \quad (\text{visto in classe}).$$

Risposte: 1) $\frac{1}{e^2}$.

Esercizio 2. Sia data la funzione

$$f(x) = 2x + \arctan\left(\frac{2x}{2x^2 - 1}\right).$$

i) Determinare il dominio di f ; ii) Studiare eventuali simmetrie di f ; iii) Posto $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, calcolare i quattro limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -x_0^\pm} f(x).$$

Esercizio 3. Determinare gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita nel modo seguente sia continua

$$f(x) = \begin{cases} -2 \sin x & \text{per } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \alpha + \beta \sin x & \text{per } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos x & \text{per } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Esercizio 4. Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita nel modo seguente sia continua

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(1/x) & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ |x|^{-2\alpha} \arctan(x) & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Risposta: $0 < \alpha < 1/2$. Sia noto che $\arctan(x) = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$.

Esercizio 5. i) Dimostrare che l'equazione $1 - x^4 = \log(1 + x^2)$ ha esattamente due soluzioni $x \in \mathbb{R}$. ii) Sia $f(x) = x^7 + x^5 + e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che per ogni fissato $y \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = y$ ha una ed una sola soluzione $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\alpha x) - x^2}{\sin^2(x) - \alpha x^2}.$$

Risposta. Per $\alpha = 1$ il limite vale 1. Per $\alpha \neq 1$ il limite vale $-1 - \alpha$.