Lezione 11

giovedì 23 ottobre 2014
14:22

Convergenza Assoluta

Diciamo che una serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge assolutamente se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

la serie dei valori assoluti.

Teorema (della Conv. Assoluta) Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente allora converge anche semplicemente e inoltre

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| .$$

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Dim. Definiamo

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$a_n^- = \min\{a_n, 0\}$$

Proprietà

i) $a_n^+ \geq 0$ e $a_n^- \leq 0$

ii) $a_n^+ + a_n^- = a_n$

iii) $a_n^+ - a_n^- = |a_n|$

iv) $a_n^+ \leq |a_n|$ e $-a_n^- \leq |a_n|$

Dal Teorema del Confronto segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$$

Questa serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} -a_n^- \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k^+ + a_k^-)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^+ + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^-$$

esiste finito ... esiste finito

Inoltre

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} a_k^+\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} a_k^-\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \underset{\substack{\| \\ a_k^+}}{|a_k^+|} + \sum_{k=1}^{n} \underset{\substack{\| \\ -a_k^-}}{|a_k^-|} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k^+ - a_k^- = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

Per $n \to \infty$ trovo

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \qquad \square$$

Attenzione

$$CA \Rightarrow CS$$

Ma:

$$CS \not\Rightarrow CA.$$

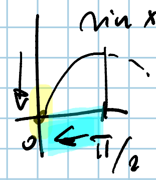
ES. 1 Discutere la convergenza della serie

$$\sum^{\infty} \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{}\right)} \cdot (-1)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} \cdot (-1)^n$$

Soluzione. Serie a segno alterno perché

$$\boxed{a_n = \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} \geq 0} \qquad 0 \leq \frac{1}{n+1} \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$$



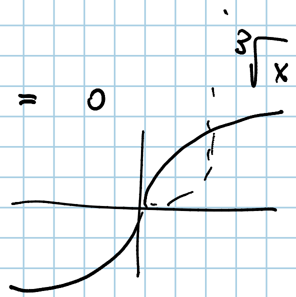
Provo con Leibniz:

(1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima SI!

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} = \sqrt[3]{\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} =$$

$\sqrt[3]{\cdot}$ è cont.

$$= \sqrt[3]{\sin\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\right)} = \sqrt[3]{\sin 0} = 0$$



(2) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente. SI

$$\frac{1}{n+1} \text{ decresce} \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \text{ decresce}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} \text{ decresce}$$

Conclusione: per Leibniz la serie converge semplicemente.

(Ma non converge Assolutamente)

Esercizio 2 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la converge semplice e assoluta della serie semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{5^n \log(n+1)} (x^2-2x)^n$$

Soluzione. La serie non è a termini positivi. Inizio a studiare la convergenza assoluta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-4)^n (x^2-2x)^n}{5^n \log(n+1)} \right| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n |x^2-2x|^n}{5^n \log(n+1)}$$

Adesso uso il Criterio della Radice

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n |x^2-2x|^n}{5^n \log(n+1)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{5} \cdot \frac{|x^2-2x|}{\sqrt[n]{\log(n+1)}} = \frac{4}{5} |x^2-2x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\log(n+1)}}$$

Calcolo il limite per confronto:

$$\sqrt[n]{\log 2} \underset{n\geq 1}{\leq} \sqrt[n]{\log(n+1)} \leq \sqrt[n]{n}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow_{n\to\infty} \qquad \downarrow$$

$$1 \qquad 1 \qquad 1$$

visto in classe

Conclusione

$$L(x) = \frac{4}{5} |x^2-2x|$$

Per il criterio della Radice: Crit. CA

(1) Se $L(x) < 1 \Rightarrow$ La serie converge assolutamente $\Rightarrow$ La serie converge anche semplicemente

con il $|\cdot|$

(2) Se $L(x) > 1 \Rightarrow$ il termine generale NON è infinitesimo e quindi la serie NON converge assolutamente

Ma allora anche il termine generale senza il $|\cdot|$ NON è infinitesimo e quindi la serie NON converge neppure semplicemente.

Nel caso $L = 1$ il criterio non dà informazioni.

Studio la disequazione:

$$L(x) < 1 \iff \frac{4}{5}|x^2 - 2x| < 1 \iff |x^2 - 2x| < \frac{5}{4}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - 2x < 5/4 & (A) \\ x^2 - 2x > -5/4 & (B) \end{cases}$$

(A) $x^2 - 2x - 5/4 < 0$ Radici dell'eq. associata $x^2 - 2x - 5/4 = 0$

$$x_\pm = \frac{2 \pm \sqrt{4+5}}{2} = \frac{2 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5/2 \\ -1/2 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$-\frac{1}{2} < x < 5/2$$

$\Delta < 0$

(B) $x^2 - 2x + 5/4 > 0$, $x_\pm = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-5}}{2}$ Non ci sono Radici Reali.

La diseq. è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$

Conclusione

$$L(x) < 1 \iff -\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$$

Per queste x c'è sia CA che CS.

CASO $L > 1$

$$L(x) > 1 \iff |x^2 - 2x| > \frac{5}{4}$$

Salto i conti

$$\iff x \in (-\infty, -1/2) \cup (\tfrac{5}{2}, \infty) \quad \circledast$$

Per queste x non c'è né CA né CS.

Rimane il caso $L(x) = 1 \iff x = -1/2$ oppure $x = 5/2$

$$x^2 - 2x \underset{}{\overset{x=-1/2}{=}} \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$x^2 - 2x \underset{x=5/2}{=} \frac{25}{4} - \frac{10}{2} = \frac{5}{4}$$

La serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cancel{4^n}}{\cancel{5^n} \log(n+1)} \left(\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+1)}$$ Serie a segno alterno

Studio la convergenza semplice con Leibniz

① $a_n = \frac{1}{\log(n+1)}$ è infinitesima: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = 0$

② a_n è decrescente perché $n \mapsto \log(n+1)$ è crescente

Per Leibniz la serie CS per $x = -1/2$ e $x = 5/2$

Esamino la CA:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\log(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$$

La serie diverge. Lo provo per confronto.

$$\log(n+1) \leq n \qquad \forall n \geq 1$$

$$\frac{1}{\log(n+1)} \geq \frac{1}{n} \qquad \forall n \geq 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Fatto Noto

Diverge per confronto

$\square$

ES. 3 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = a_n$$

Soluzione Termini positivi. Provo subito col Crit. del Rapporto:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)} \cdot n^n}{(n+1)^{\cancel{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \qquad \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cdots}{n+1} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

Ma $L = \frac{1}{e} < 1 \iff e > 1$ Vero!.

Conclusione: la serie converge

ES. 4 Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\sin n\right)\right)^n .$$

Si converge assolutamente infatti

$$\left|\sin\left(\sin(n)\right)\right| \leq \sin(1) = q < 1$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin(\sin(n))\right|^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} q^n < \infty$$

Serie geom.

Converge per confronto