Lezione 12

venerdì 24 ottobre 2014
10:19

ESERCIZI

ES 1 Calcolare in forma algebrica tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z^2+2iz-1)^2 = -256$$

Soluzione. Osservo che

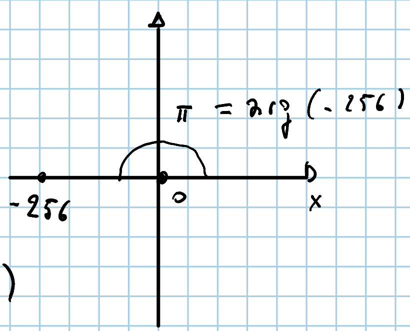
$$z^2+2iz-1 = (z+i)^2$$

E quindi l'eq. è

$$(z+i)^4 = -256$$

Poniamo $w = z+i$ e risolviamo $w^4 = -256$
dove

$$-256 = |-256| \, e^{i \arg(-256)} = 256 \, e^{i\pi}$$



Se $w = r e^{i\vartheta}$ con $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$ incognite da determinare, troviamo

$$= (r e^{i\vartheta})^4 = w^4 = -256 = 256 \, e^{i\pi}$$

$$= r^4 (e^{i\vartheta})^4 = r^4 e^{i 4\vartheta}$$

Troviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} r^4 = 256 \\ 4\vartheta_k = \pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La prima dà $r = 4$, $r \geq 0$. La seconda

$$\vartheta_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

Le soluzioni w sono

$$w_0 = 4e^{i\vartheta_0} = 4e^{i\pi/4} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= 2\sqrt{2} + i\,2\sqrt{2}$$

$$w_1 = 4e^{i\vartheta_1} = 4e^{i\frac{3}{4}\pi} = -2\sqrt{2} + i\,2\sqrt{2}$$

$$w_2 = \dots = -2\sqrt{2} - i\,2\sqrt{2}$$
$$w_3 = \dots = 2\sqrt{2} - i\,2\sqrt{2}$$

Conclusione: $z = w - i$

$$z_0 = w_0 - i = \dots$$
$$\vdots$$
$$z_3 = w_3 - i = \dots .$$

ES. 2 Per $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la serie

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + \operatorname{tg}(1/n)}{(1+n)^{2\alpha^2 - 1/2}}} .$$

Determinare tutti gli α tali che

i) il termine generale della serie è infinitesimo

ii) la serie converga semplicemente

iii) la serie converga assolutamente.

Soluzione

i) Deve essere

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1 + \operatorname{tg}(1/n)}{(1+n)^{2\alpha^2 - 1/2}} = 0$$

$\Updownarrow$

il denominatore $\to \infty$

$$\iff \lim_{n\to\infty} (1+n)^{2\alpha^2 - 1/2} = +\infty$$

$$\iff 2\alpha^2 - 1/2 > 0 \iff 2\alpha^2 > \frac{1}{2} \iff \alpha^2 > \frac{1}{4}$$
$$\iff \alpha \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

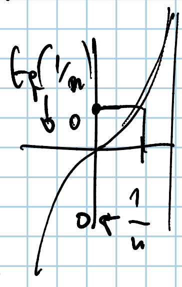
(ii) Possiamo restringere lo studio al caso $|\alpha| > \frac{1}{2}$.

serie a segno alterno. Uso Leibniz

① $a_n = \dfrac{1+tg(1/n)}{(1+n)^{2\alpha^2-1/2}}$ è infinitesimo per $|\alpha| > 1/2$ visto sopra.

(sempre per $|\alpha| > 1/2$)

② $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente, $\underline{\text{sì}}$



- $n \longmapsto tg\, 1/n$ è decrescente
- $n \longmapsto (n+1)^{\overset{>0}{2\alpha^2-1/2}}$ è crescente

$\Downarrow$

$n \longmapsto \dfrac{1}{(n+1)^{2\alpha^2-1/2}}$ è decrescente

- Deduco che $n \to \dfrac{1+tg\,1/n}{(n+1)^{2\alpha^2-1/2}}$ è decrescente

Conclusione: $|\alpha| > \dfrac{1}{2} \Longleftarrow$ Serie Converge semplicemente

(iii) Voglio det. tutti gli $\alpha\in\mathbb{R}$ tali che

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1+tg\frac{1}{n}}{(n+1)^{2\alpha^2-1/2}} \right| < \infty$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1+tg\,1/n}{(n+1)^{2\alpha^2-1/2}}}_{= a_n} < \infty$$

Abbiamo

$$a_n = \frac{1+tg\,1/n}{n^{2\alpha^2-1/2}\left(1+1/n\right)^{2\alpha^2-1/2}} \le$$

$$\le \frac{2}{n^{2\alpha^2-1/2}}$$

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2\alpha^2-1/2} \geq 1$

$\Downarrow$

$$n^{2\alpha^2-1/2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\alpha^2-1/2}} \leq 1$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha^2-1/2}}$$

Converge se e solo se

$$2\alpha^2 - 1/2 > 1 \iff 2\alpha^2 > \frac{3}{2}$$

$$\iff \alpha^2 > \frac{3}{4}$$

$$\iff |\alpha| > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Prima Conclusione:

$$|\alpha| > \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \text{Serie Converge Assolut.}$$

Vado Avanti

$$a_n = \frac{1+\operatorname{tg} 1/n}{n^{2\alpha^2-1/2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\alpha^2-1/2}} \geq \frac{1}{n^{2\alpha^2-1/2}\cdot N_\alpha}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\alpha^2-1/2} \leq 2^{2\alpha^2-1/2} = N_\alpha$$

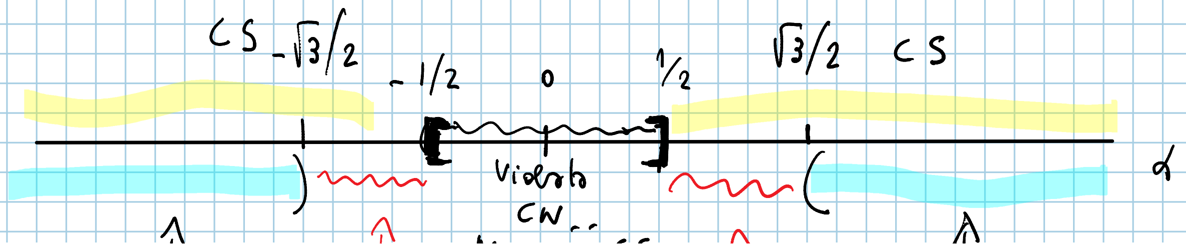
Dunque

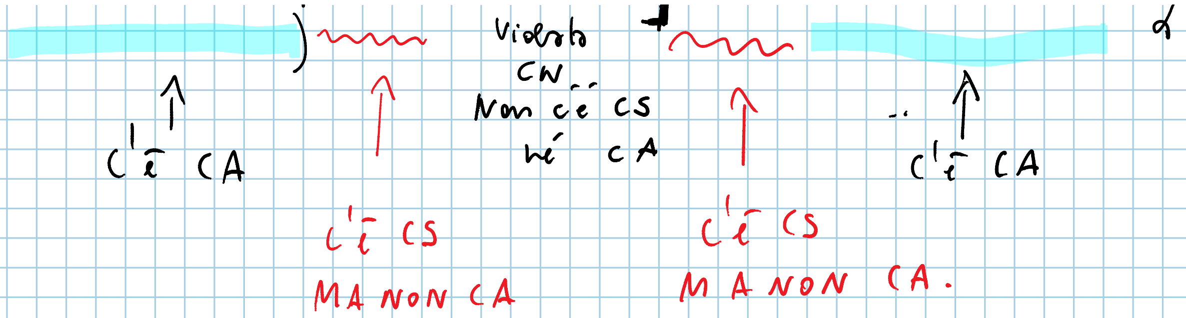
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \frac{1}{N_\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha^2-1/2}} = +\infty \quad \text{se } |\alpha| \leq \sqrt{3}/2$$

Per Confronto

$$|\alpha| \leq \sqrt{3}/2 \Longrightarrow \text{Serie Diverge Assolut.}$$

Conclusioni





ES. 3 Sia $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ la funzione $f(z)=\frac{2z^2}{i}$.
Sia poi $A=\{\alpha(1-i)\in\mathbb{C} : \alpha\in\mathbb{R}\}$.
Determinare l'insieme $A_1=\{f(z)\in\mathbb{C} : z\in A\}$
" " $A_2=\{z\in\mathbb{C} : f(z)\in A\}$

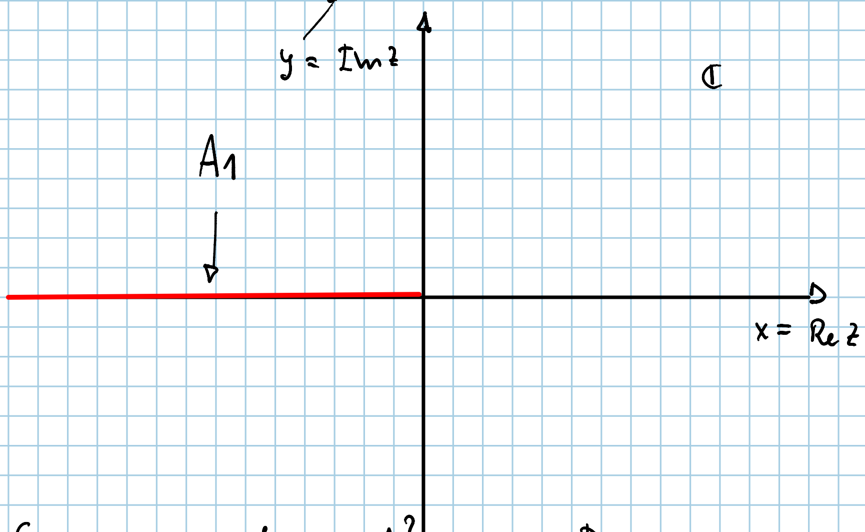
Soluzione

(1) Gli elementi di A_1 sono del tipo $f(z)$ con $z=\alpha-i\alpha$ al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$

Dunque

$$f(z)=\frac{2z^2}{i}=\frac{2}{i}(\alpha-i\alpha)^2=\frac{2}{i}\left(\cancel{\alpha^2}-2i\alpha^2-\cancel{\alpha^2}\right)$$

$$f(z)=\frac{2}{\cancel{i}}\left(-2\cancel{i}\,\alpha^2\right)=-4\alpha^2$$ al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.



(2) $A_2=\{z\in\mathbb{C} : f(z)\in A\}$. Dunque

$f(z)=\frac{2z^2}{i}$ deve essere della forma $\alpha-i\alpha$ per qualche $\alpha\in\mathbb{R}$

Con $z=x+iy$ avremo :

$$\frac{2}{i}\, z^2 = \frac{2}{i}\,(x+iy)^2 = \frac{2}{i}\,(x^2+2ixy-y^2) =$$

$$= \frac{2}{i}\,x^2 + \boxed{4xy} - \frac{2}{i}\,y^2 \qquad \text{deve essere}$$

$$= -2ix^2 + 4xy + 2iy^2 = \alpha - i\alpha$$

Deve essere verificato il sistema con $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 4xy = \alpha \\ -2x^2 + 2y^2 = -\alpha \end{cases}$$

Dunque $z = x+iy$ deve verificare:

$$-2x^2 + 2y^2 = -4xy$$

$$y^2 - x^2 + 2xy = 0$$

Se $y = 0$ trovo l'eq. $x^2 = 0$ e cioè $x = 0$.
Dunque $z = 0$ è soluzione $(0 \in A_2)$.
Se $y \neq 0$ divido per $y^2 \neq 0$ e trovo

$$1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\,\frac{x}{y} = 0$$

Scrivo $\boxed{t = \frac{x}{y}}$. Lui deve verificare

$$2\sqrt{2} = \sqrt{2\cdot 4}$$

$$1 - t^2 + 2t = 0 \iff t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$\iff t = t_\pm = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$$

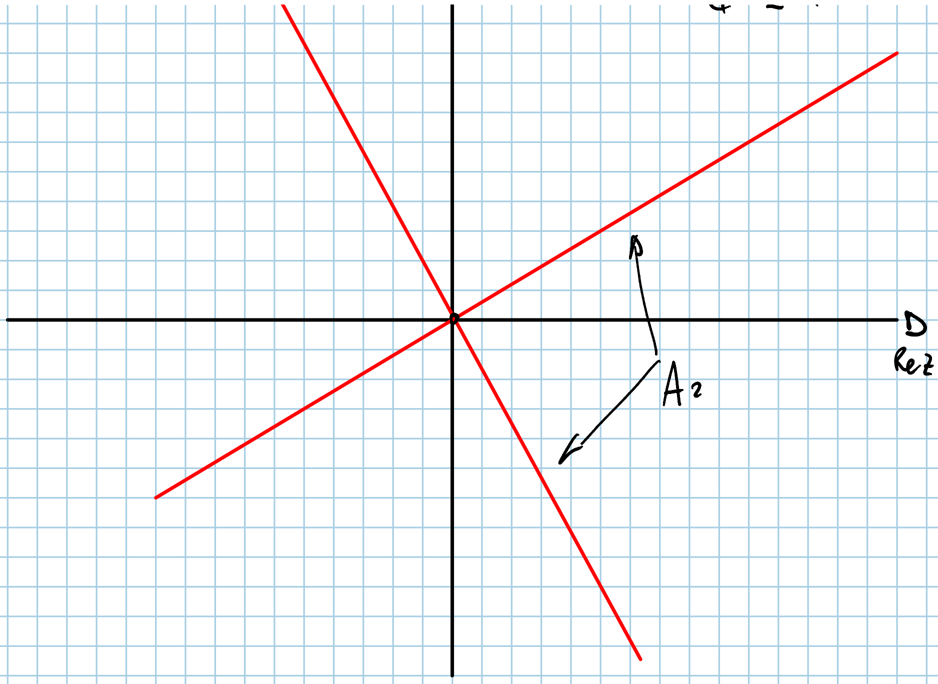
$$\iff t = t_\pm = 1 \pm \sqrt{2}$$

Quindi trovo le due equazioni

$$\frac{x}{y} = 1+\sqrt{2} \iff x = (1+\sqrt{2})\,y$$

$$\frac{x}{y} = 1-\sqrt{2} \iff x = (1-\sqrt{2})\,y$$

$$\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$$



ES 4 Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left| z^2 \left(\overline{(z+4i)} - z \right) \right| = \left| z (z+4i) - z \cdot \bar{z} \right|$$

e disegnarle nel piano di Gauss.

Soluzione L'eq. è equiv. alla seguente

$$|z|^2 \cdot \left| \overline{(z+4i)} - z \right| = |z| \cdot \left| (z+4i) - \bar{z} \right|$$

Vedo che $z = 0$ è soluzione.
Suppongo $z \neq 0$ e divido per $|z| \neq 0$ e trovo

$$|z| \cdot \left| \overline{(z+4i)} - z \right| = \left| (z+4i) - \bar{z} \right|$$

Ricordo che $|\bar{w}| = |w| \quad \forall w \in \mathbb{C}$
Quindi

$$\left| \overline{(z+4i)} - z \right| = \left| \overline{\overline{(z+4i)} - z} \right| =$$

$$= \left| \overline{\overline{(z+4i)}} - \bar{z} \right| = \left| (z+4i) - \bar{z} \right|$$

Dunque gli z t.c. $(z+4i) - \bar{z} = 0$ sono soluzioni
le studio dopo. Suppongo che $\left| (z+4i) - \bar{z} \right| \neq 0$

divido per n e trovo :

$$|z| = 1$$ Sono soluzioni
Circonferenza unitaria.

Mi rimane da risolvere

$$(z+4i) - \bar{z} = 0 \qquad z = x+iy \quad \text{e trovo}$$

$$\cancel{x}+iy+4i-(\cancel{x}-iy) = 0 \iff$$

$$2iy+4i = 0 \iff$$

$$y+2 = 0 \iff$$

$$y = -2$$