Lezione 13

lunedì 27 ottobre 2014
10:21

FUNZIONI DI VARIABILE REALE

Funzione Dati due insiemi $A, B \subset \mathbb{R}$, una funzione $f : A \to B$ è una "legge", "applicazione", "regola" che ad ogni elemento $x \in A$ associa un unico elemento $f(x) \in B$ dell'insieme B.

Diremo che
- $A = D(f)$ è il dominio della funzione f.
- B è il codominio della funzione f.

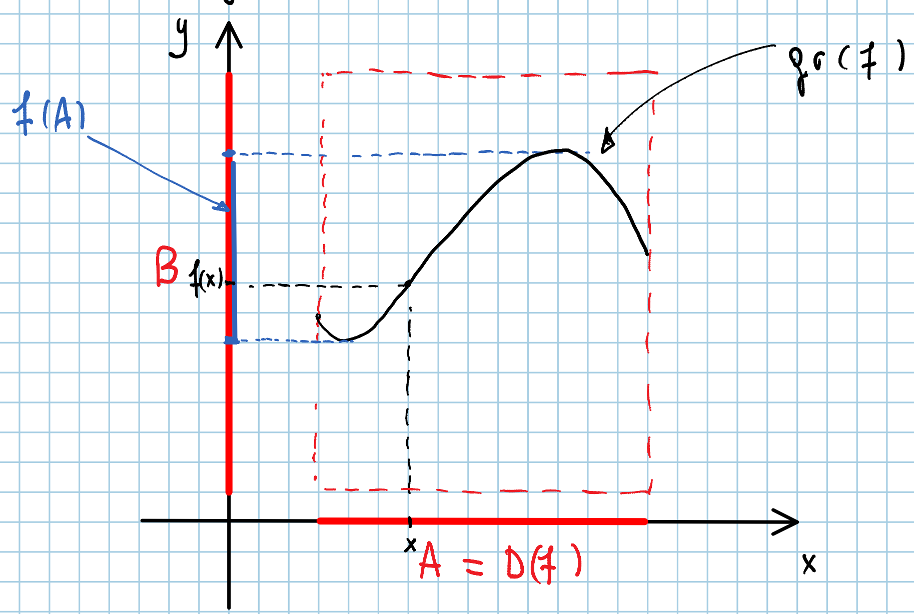
Immagine L'insieme

$$f(A) := \{ f(x) \in B : x \in A \} \subset B$$

si dice immagine di A rispetto (secondo) la funzione f.

Grafico Il grafico di una funzione $f : A \to B$ con $A, B \subset \mathbb{R}$ è il seguente sottoinsieme del piano cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$gr(f) = \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in A = D(f) \}$$



DEF

- Diciamo che $A \subset \mathbb{R}$ è simmetrico se $x \in A \iff -x \in A$
- Diciamo che una funzione $f: \underset{\text{sim.}}{A} \to \mathbb{R}$ si dice pari se

$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in A = D(f)$$

- Diciamo che $f: \underset{\text{sim.}}{A} \to \mathbb{R}$ è dispari se si ha

$$f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in A = D(f).$$

Esempio

(1) $f(x) = \dfrac{x \sin x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, è pari:

$$f(-x) = \frac{(-x)\cdot \sin(-x)}{1+(-x)^2} = -\frac{x \cdot \overbrace{(-\sin x)}^{\text{è dispari}}}{1+x^2}$$

$$= \frac{x \sin x}{1+x^2} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

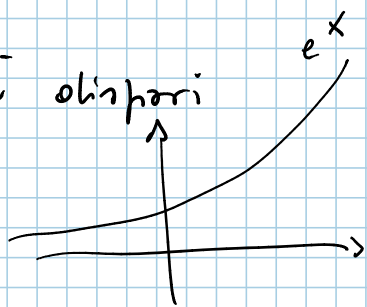
(2) $f(x) = \dfrac{x^3 \cos x}{\log(2+|x|)}$, $x \in \mathbb{R}$, è dispari:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 \cos(-x)}{\log(2+|-x|)} = \frac{-x^3 \cos(x)}{\log(2+|x|)}$$

$$= -\frac{x^3 \cos x}{\log(2+|x|)} = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

Esistono certamente funzioni nè pari nè dispari

$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$



Estremo superiore ed estremo di una funzione

Def Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione:
Definiamo l'estremo superiore di f su A:

$$\sup_A f = \sup_{x \in A} f(x) = \sup \{ f(x) \in \mathbb{R} : x \in A \}$$
$$= \sup f(A)$$

Analogamente l'estremo inferiore di f su A è:

$$\inf_A f = \inf_{x \in A} f(x) = \inf \{ f(x) \in \mathbb{R} : x \in A \}$$
$$= \inf f(A)$$

Diremo che $f: A \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata se

$$\sup_A f < \infty \quad \text{e}$$
$$\inf_A f > -\infty$$

Osservazione Si ha che $L = \sup_A f \in \mathbb{R}$ se e solo se valgono i seguenti due fatti:

(1) $L \geq f(x) \quad \forall x \in A$.

(2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A$ tale che $f(x) > L - \varepsilon$.

Def Se esiste $x_0 \in A = D(f)$ tale che $f(x_0) = \sup_A f$ diremo che x_0 è un punto di massimo di f su A, chiameremo $f(x_0)$ il valore massimo di f su A e scriveremo

$$\sup_A f = \sup_{x \in A} f(x) = \max_A f = \max_{x \in A} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Analogamente se esiste $x_1 \in A = D(f)$ tale che $f(x_1) = \inf_A f$ diremo che $x_1 \in D(f)$ è un punto di minimo, chiameremo $f(x_1)$ il valore minimo di f in A e scriveremo

$$\inf_A f = \min_A f = f(x_1) \in \mathbb{R}.$$

<u>Esercizio</u> Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$\to \quad f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Calcolare $\sup_{\mathbb{R}} f$, $\inf_{\mathbb{R}} f$ dire se esistono $\max_{\mathbb{R}} f$, $\min_{\mathbb{R}} f$ e calcolare l'immagine $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

Soluzione: Osservo che f è una funzione pari: $f(-x) = f(x)$ e quindi basta studiare la funzione per $x \geq 0$.

Poi osservo che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e inoltre

$$f(x) = 0 \iff x = 0.$$

Dunque esiste $\min_{\mathbb{R}} f = \inf_{\mathbb{R}} f = 0$ ed esiste un unico punto di minimo che è $x = 0$.

Cerco di dimostrare che

$$\sup_{\mathbb{R}} f = 1$$

Devo controllare che

(1) $f(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) > 1 - \varepsilon$.

Conti:

(1) $\overset{\text{VERO}}{f(x) \leq 1} \iff \dfrac{x^2}{1+x^2} \leq 1 \iff x^2 \leq 1 + x^2 \iff \overset{\text{VERO}}{0 \leq 1}$

$\forall x$

(2) Fisso il parametro $\varepsilon > 0$ e cerco $x \in \mathbb{R}$ tale che

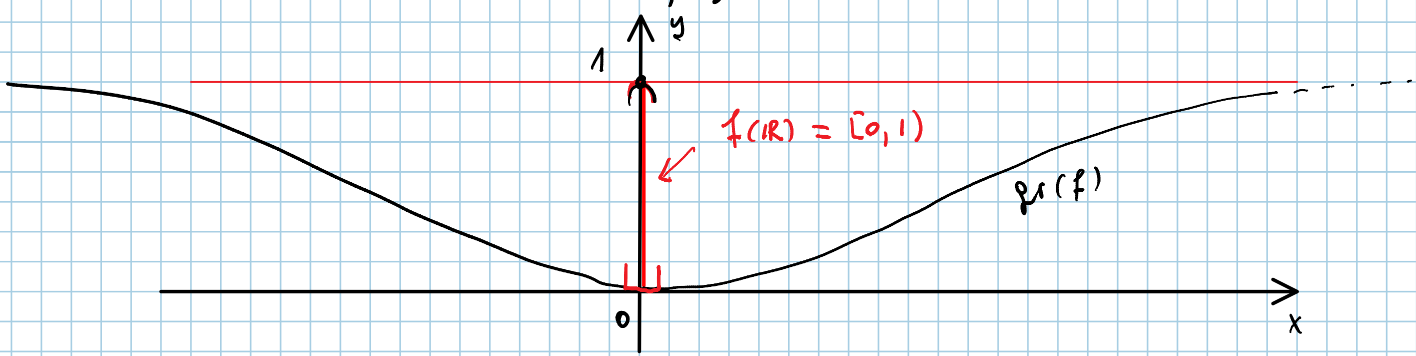
$$f(x) > 1-\varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{x^2}{1+x^2} > 1-\varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 > (1-\varepsilon) + (1-\varepsilon)x^2$$
$$\Updownarrow$$
$$\varepsilon x^2 = x^2 - (1-\varepsilon)x^2 > (1-\varepsilon)$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$
$$\Updownarrow$$
$$|x| > \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} \quad \text{sono tutte soluzioni}$$

Ho provato che $1 = \sup_{\mathbb{R}} f$.

Esiste il $\max_{\mathbb{R}} f$? NO. Perché $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2} < 1 \quad \forall x$.

Mi aspetto che l'insieme immagine sia

$$f(\mathbb{R}) = [0,1) \subset \mathbb{R}$$



Funzione inversa

DEF Sia $f: A \to B$ una funzione. Diremo che

i) f è iniettiva (1-1) se: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

ii) f è suriettiva su tutto B (su): $\forall y \in B\ \exists x \in A : f(x) = y$.

iii) f è biiettiva $\Leftrightarrow$ f è sia 1-1 che su.

DEF. Sia $f: A \to B$ una funzione 1-1 e su.
Allora possiamo definire la funzione inversa di f

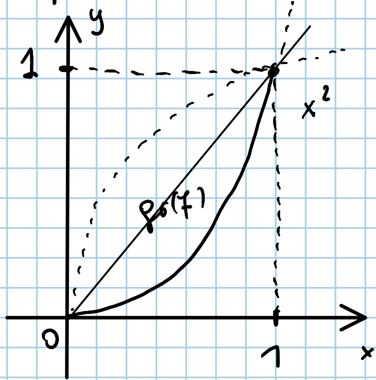
$$f^{-1} : B \to A$$

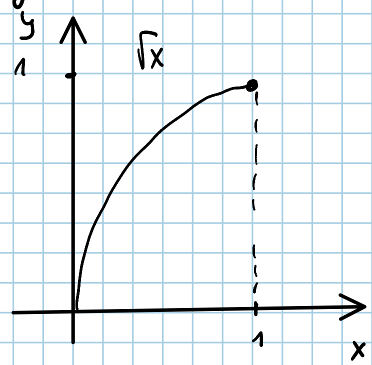
in questo modo: diciamo che $f^{-1}(y) = x$,
con $y \in B$ ed $x \in A$, se e solo se $f(x) = y$.

$\uparrow$ $\forall y \in B$ questa equazione ha soluzioni (perché f è su)
Inoltre la soluz. $x \in A$ è unica, perché f è 1-1

Quindi la DEF. è ben posta.

Osservazione Il grafico di f e il grafico di f^{-1} sono l'uno il riflesso dell'altro rispetto alla bisettrice del 1° - 3° quadrante: la retta $y = x$.





$f: [0,1] \to [0,1]$

Ad es. $f(x) = x^2$

Esercizio Sia $f: [0,1] \to [0,1]$ la funzione

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \qquad x \in [0,1].$$

(1) Provare che f è 1-1 e su da $[0,1]$ a $[0,1]$

(2) Calcolare la funzione inversa $f^{-1}: [0,1] \to [0,1]$.

Soluzione

(1) Provo che f è 1-1. Devo provare che $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
$x, y \in [0,1]$

Conti:

$$f(x) = f(y) \iff \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2y}{1+y^2} \iff \cancel{2}x(1+y^2) = \cancel{2}y(1+x^2)$$

$$\iff x + \boxed{xy^2} - y - \boxed{yx^2} = 0$$

$$\iff x - y + xy(y - x) = 0$$

$$\iff (x-y)(1-xy) = 0$$

$$\iff \underbrace{x - y = 0}_{\substack{\text{ok} \\ x = y}} \quad \text{oppure} \quad 1 - xy = 0$$

Nel 2° caso ho $xy = 1$ con $x, y \in [0,1] \Rightarrow x = y = 1$
ok.

Provo ora che f è suriettiva su $[0,1]$. Quindi prendo $y \in [0,1]$ e cerco $x \in [0,1]$ tale che $f(x) = y$

Risolvo l'equazione nella x

$$f(x) = y \iff \frac{2x}{1+x^2} = y$$

$$\iff 2x = y + yx^2$$

$$\iff yx^2 - 2x + y = 0 \qquad \text{Eq. 2° grado}$$

Se $y = 0$ trovo $-2x + 0 = 0$ e cioè $x = 0$.
Se $y \in (0, 1]$ uso la formula risolutiva

$$x_{\pm} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4y^2}}{2y} = \frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y}$$