Lezione 15

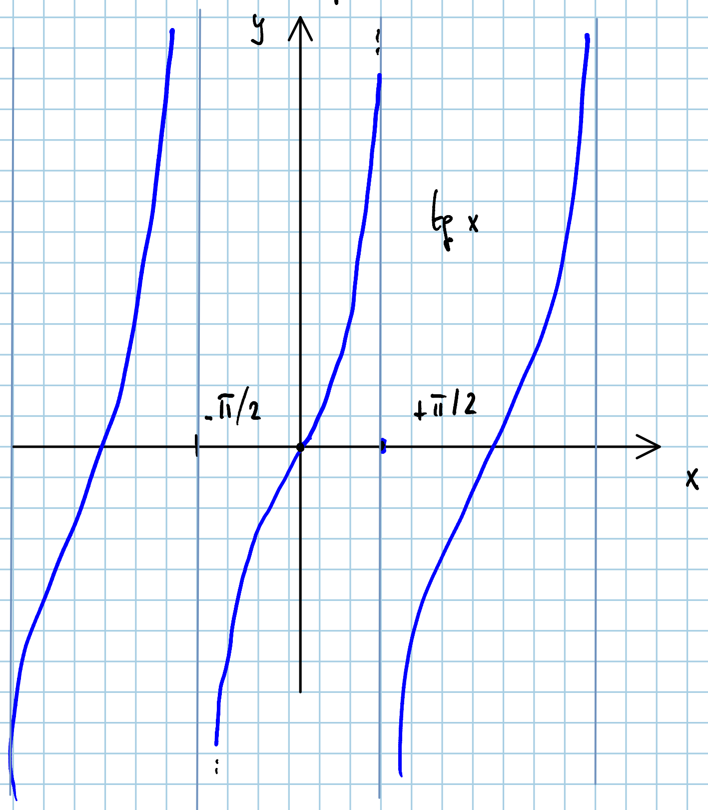
venerdì 31 ottobre 2014
10:19

Funzione tangente ed arcotangente

Dove $\cos x \neq 0$ e cioè per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
possiamo definire la funzione

$$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

La funzione tg è π-periodica e nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$
il suo grafico è il seguente



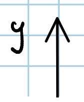
La funzione tg è dispari

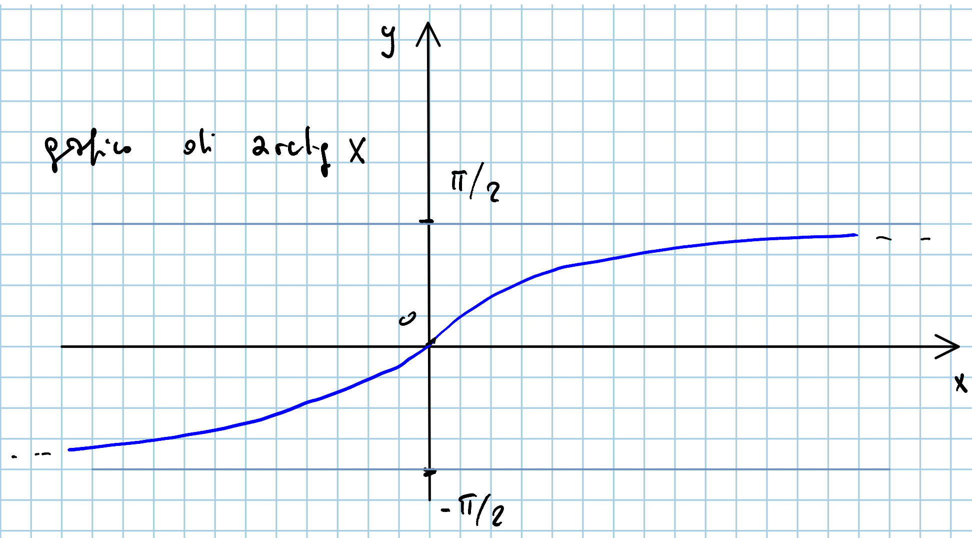
Ovvero che $tg : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ è una funzione
strett. crescente ($\Rightarrow$ iniettiva) ed anche suriettiva.

Quindi è definita la sua funzione inversa

$$arctg : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

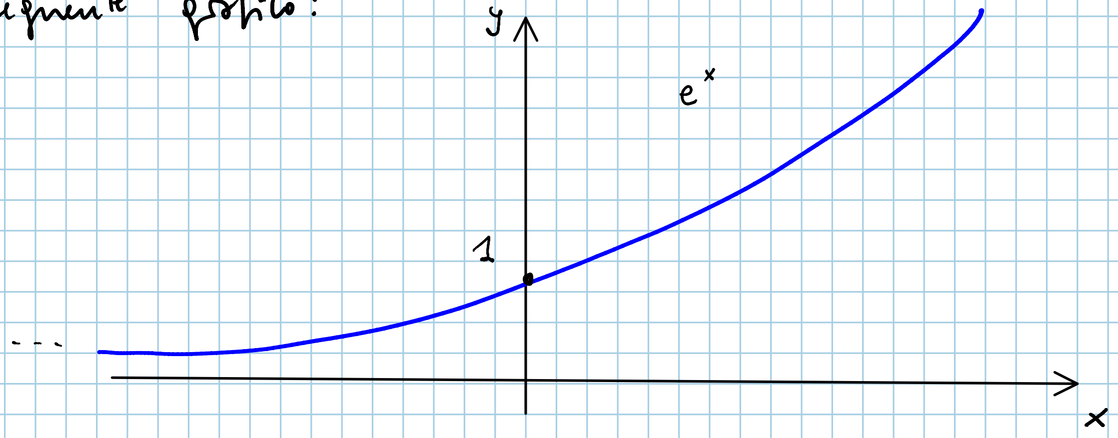
Il suo grafico è il seguente:





Funzioni iperboliche

La funzione esponenziale $x \mapsto e^x$, $x \in \mathbb{R}$, ha il seguente grafico:



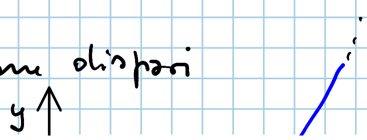
Definiamo le funzioni sinh, cosh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono definite in questo modo:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

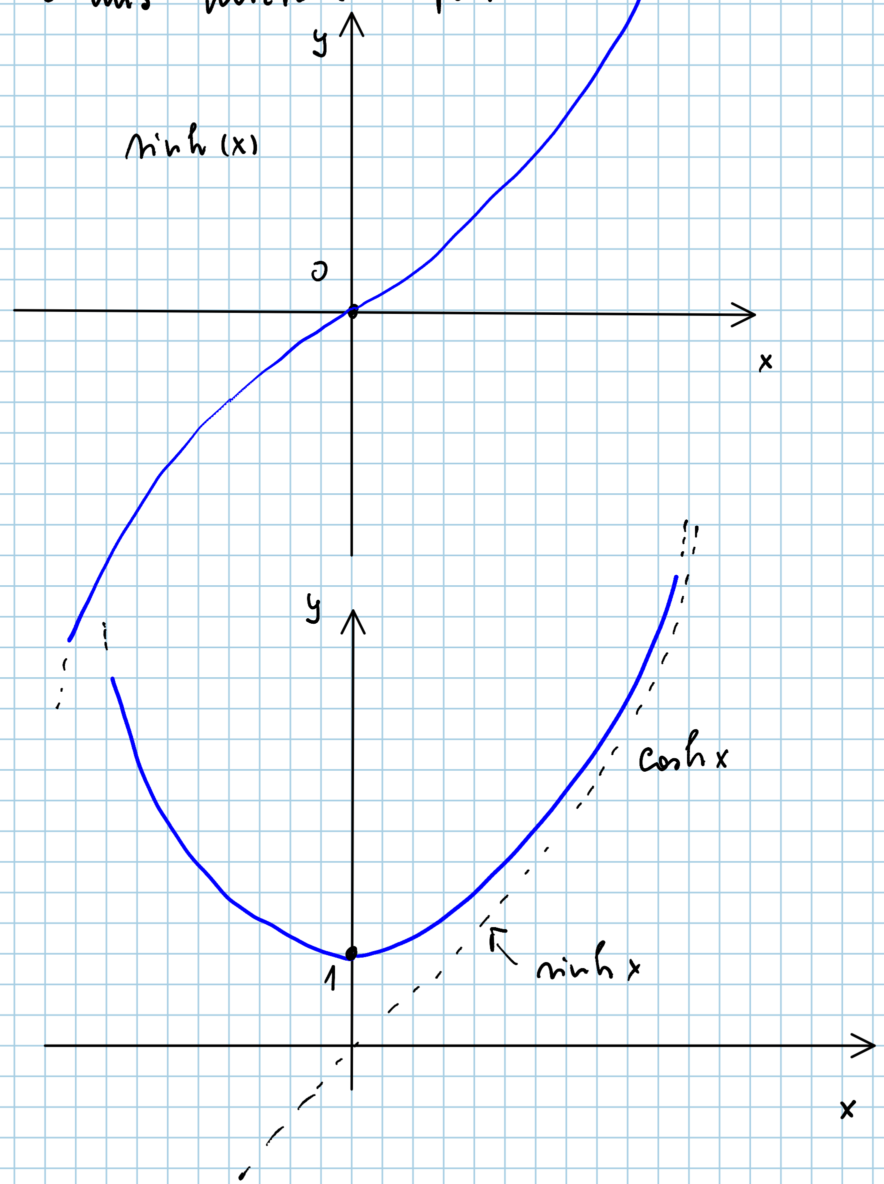
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Osservo che

- $\cosh(x)$ è una funzione pari
- $\sinh(x)$ è una funzione dispari



• sinh(x) è una funzione dispari



Osservazione Vale l'identità iperbolica fondamentale:

$$\circledast \qquad (\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Cioè il punto $(\cosh x, \sinh x) \in \mathbb{R}^2$ appartiene all'iperbole di equazione

$$x^2 - y^2 = 1 .$$

Verifico $\circledast$

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{\ }\right)^2 - \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{\ }\right)^2 =$$

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(\cancel{e^{2x}} + \cancel{e^{-2x}} + 2\right) - \left(\cancel{e^{2x}} + \cancel{e^{-2x}} - 2\right)\right)$$

$$= 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Potenze e Radici

Noi vogliamo definire

$$x^\alpha \in \mathbb{R}$$

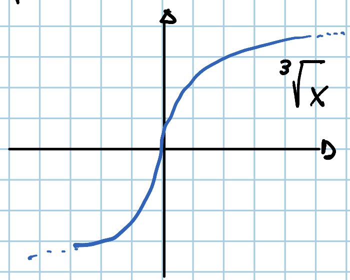
quando $\alpha \in \mathbb{R}$ è un esponente reale e $x \geq 0$ è una base reale.

Ad: cosa è $\pi^{\sqrt{2}}$?

Precisazione! Se $\alpha < 0$ dovremo supporre $x > 0$.

Osservazione. In casi speciali x^α può essere definito $\forall x \in \mathbb{R}$.
Ad esempio con $\alpha = 1/3$

$$x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$$



Iniziamo la definizione = costruzione di $x^\alpha \in \mathbb{R}$.

Convenzione: $x^0 = 1$ per ogni $x > 0$.
Attenzione 0^0 non è definito.

Supponiamo $\alpha \neq 0$.

1° Passo: $\alpha = n \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$. Allora

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ volte}}$$

2° Passo : $\alpha = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$.

La funzione potenza n-esima. Cioè la funzione

$$f(y) = y^n, \quad y \geq 0$$

verifica $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ ed è strettamente crescente e quindi iniettiva. Inoltre è anche suriettiva su $[0, \infty)$. Quindi esiste la funzione inversa

$$f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$$

Possiamo definire

$$x^{\frac{1}{n}} = f^{-1}(x), \qquad x \geq 0$$

Notazione:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, \qquad x \geq 0.$$

3° Passo : $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$ $\left(\frac{p}{q} > 0\right)$

In questo caso definiamo

$$x^{\frac{p}{q}} = \underbrace{\left(x^{\frac{1}{q}}\right)}_{\text{definito al Passo 2}}{}^{\overset{\text{definita al Passo 1}}{p}} \underset{\text{É equivalente}}{=} \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

Osservazione

(1) Se $x > 1$ allora $\mathbb{Q} \ni \alpha \mapsto x^\alpha$ è crescente in α.

(2) Se $0 < x < 1$ allora $\mathbb{Q} \ni \alpha \mapsto x^\alpha$ è decrescente in α.

4° Passo Vogliamo definire x^α quando $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$

- Se $x = 1$ definiamo $1^\alpha = 1$
- Se $x > 1$ definiamo

def $\downarrow$

α

$$x^{\alpha} \overset{def}{=} \sup \{ x^{\beta} : \beta \in \mathbb{Q} , 0 < \beta < \alpha \}$$

definiti al Passo 3

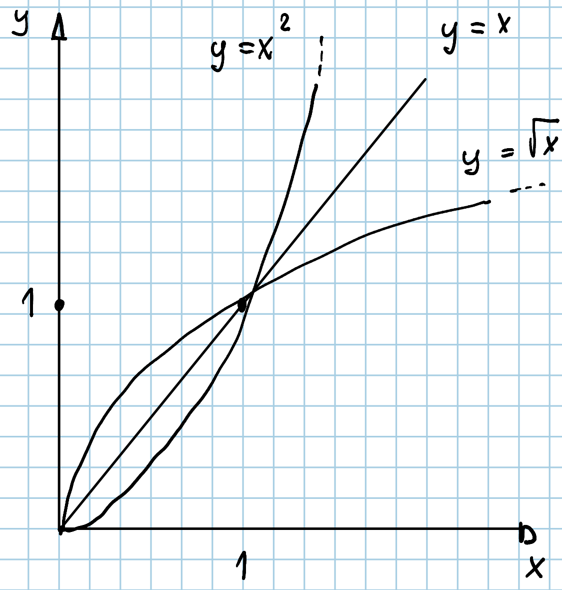
Esiste per AC

• Se $0 < x < 1$

$$x^{\alpha} = \inf \{ x^{\beta} : \beta \in \mathbb{Q} , 0 < \beta < \alpha \} .$$

Disegnamo il grafico della funzione x^{α} quando $\alpha = 1, 2, 1/2$

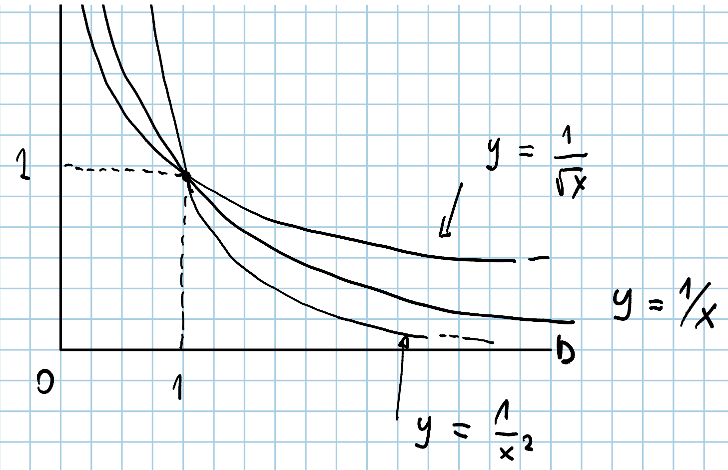
$x \geq 0$



Passo 5. Se $\alpha < 0$ e $x > 0$ definiamo:

$$x^{\alpha} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-\alpha}$$ È definito al Passo 4

Facciamo il grafico della funzione $\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha}}$, $x > 0$, quando $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha = 1/2$



Proprietà delle Potenze

TEOR 1 (Propr. algebriche) Siano $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$ e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora:

1) $x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} \cdot x^{\beta}$
2) $(xy)^{\alpha} = x^{\alpha} \cdot y^{\alpha}$
3) $(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta}$
4) $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha}}$

TEOR 2 (Prop. di monotonia) Siano $x, y \in \mathbb{R}$ $x, y > 0$ e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora:

1) $0 \leq x < y$ e $\alpha > 0$ $\Rightarrow$ $x^{\alpha} < y^{\alpha}$ (funzione crescente della base con $\alpha > 0$)

2) $0 \leq x < y$ e $\alpha < 0$ $\Rightarrow$ $x^{\alpha} > y^{\alpha}$ (funz. decrescente della base)

3) $x > 1$ e $\alpha < \beta$ $\Rightarrow$ $x^{\alpha} < x^{\beta}$ (funz. crescente dell'esponente se $x > 1$)

4) $0 < x < 1$ e $\alpha < \beta$ $\Rightarrow$ $x^{\alpha} > x^{\beta}$ (funz. decrescente dell'esponente se $0 < x < 1$).

Esponenziali e logaritmi

Sia $a > 0$ un numero reale fissato, la base.

La funzione $f_a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$

$$f_a(x) = a^x > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

si chiama funzione esponenziale di base a.

Dal Teorema precedente segue che

$$a > 1 \Rightarrow f_a \text{ è strettamente crescente}$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow f_a \text{ è strettamente decrescente}$$

In entrambi i casi la funzione f_a è iniettiva ed inoltre è anche suriettiva (non lo dimostriamo).
Quindi possiamo definire la funzione inversa

$$f_a^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

Definiamo allora il logaritmo in base a, con $a > 0$ $a \neq 1$

$$\log_a(x) = f_a^{-1}(x) \quad \text{funzione inversa dell'esponenziale}$$